

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ СИСТЕМ

Государственный комитет РСФСР по делам науки и высшей школы
Уральский ордена Трудового Красного Знамени политехнический
институт им.С.М.Кирова

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ СИСТЕМ

Межвузовский сборник научных трудов

Екатеринбург
1991

УДК 62.50

Предложены эффективный в инженерных приложениях метод расчета потенциальных управлений с обратной связью и эффективная численная реализация методики расчета на основе метода конечных элементов.

Основное содержание составляют статьи, посвященные разработке методов расчета управлений с обратной связью для нелинейных систем и программных управлений.

Программные управления рассчитываются для линейных и нелинейных систем с помощью методов типа принципа максимума. Соответствующие постановки задач состоят в управлении объектами относительно заданной совокупности целевых множеств в фазовом пространстве.

Ряд статей сборника содержит результаты по методам расчета импульсных управлений, а также инженерные рекомендации по расчету управлений для конкретных объектов.

Сборник предназначен специалистам в области автоматизации управления и студентам старших курсов специальности 2201 "Автоматизация и управление в технических системах".

Р е ц е н з е н т   кафедра прикладной математики Уральского государственного университета им.А.М.Горького

Утвержден редакционно-издательским советом института

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разработка инженерных методик расчета законов управления с обратной связью, обеспечивающих требуемые динамические свойства, является одной из основных проблем при практическом применении методов математической теории управления.

Требования, предъявляемые к системам на практике, являются противоречивыми. В математических постановках чаще всего формулируются задачи с единственными целями синтеза, например задачи оптимального управления. В инженерных приложениях обычно нельзя достаточно обоснованно указать функционал качества системы, поскольку при этом нужно уметь оценивать соответствие свойств системы и выбранного функционала. Последняя задача намного труднее по сравнению с расчетом оптимальных управлений.

В сборнике представлен ряд статей, направленных на создание эффективной методики инженерного синтеза законов управления с обратной связью (динамических регуляторов для нелинейных систем). Соответствующие управления названы потенциальными. Суть подхода заключается в том, что решение задачи синтеза нелинейной системы складывается из решений множества задач линейного синтеза. Заметим, что цель синтеза нелинейной системы формулируется на основе частных целей синтеза к свойствам линеаризованных замкнутых систем. Такой подход позволяет разрешить конфликт противоречий к свойствам системы на этапе линейного синтеза. Численно потенциальные управления рассчитываются с помощью метода конечных элементов.

Другая группа статей посвящена математическим вопросам расчета оптимальных управлений, с утверждениями, аналогичными принципу максимума.

На примере задачи управления роботом-манипулятором в среде показано, что соответствующие управления содержат импульсные составляющие. Представлены результаты по методам расчета импульсных управлений.

Ряд статей сборника содержит решение прикладных задач управления конкретными объектами.

УДК 62.50

А.Н.Обомнин (Уральский политехнический институт)

РАСЧЕТ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ СИСТЕМ

Введение

Основой построения моделей реальных физических объектов с помощью дифференциальных уравнений является идея линеаризации. Если правые части дифференциальных уравнений – непрерывно дифференцируемые функции, то это означает, что "в малом" эти функции линейны, т.е. в окрестности каждой из точек определения они с точностью до бесконечно малых второго порядка описываются линейными функциями. Фактически все основные физические законы в дифференциальной форме записи получены на основе перехода от локальных описаний, справедливых для малых приращений, к глобальным описаниям с использованием дифференциальных уравнений. Однако глобальность описания объекта дифференциальным уравнением является условной, поскольку практически используемые численные методы решения дифференциальных уравнений основаны на "сшивании" локальных решений.

Для многих задач инженерного характера представляется естественным задавать желаемые глобальные свойства замкнутым системам управления путем задания их локальных свойств. Конечно, соответствие локальных и глобальных свойств нелинейных систем не является в общем случае простым. Для часто встречающихся на практике задач управления, в которых требуется получить одинаковые или слабо меняющиеся свойства замкнутых систем во всей допустимой области рабочих режимов, обеспечение локальных свойств приводит и к аналогичным глобальным свойствам.

Нелинейный объект можно представить в виде множества линейных объектов путем линеаризации в каждой точке допустимой области. Каждый линеаризованный объект описывает поведение исходного нелинейного объекта в некоторой, возможно очень малой, окрестности точки линеаризации. "Сшивание" линеаризованных объектов определяет исходный нелинейный объект.

Надлежащим расчетом законов управления можно получить замкнутые линеаризованные системы с необходимыми локальными свойствами, а закон управления для нелинейного объекта в целом получить за счет "сшивания" соответствующих законов управления для линеаризованных систем. Именно эта идея и развивается в данной работе до получения практической инженерной методики расчета законов управления. Всю методику расчета невозможно изложить в рамках одной статьи, поэтому основное внимание будет уделено математической постановке задачи расчета потенциального управления, ее формальному решению и некоторым свойствам замкнутых систем вблизи точек равновесия.

Использование термина "потенциальный" подчеркивает, что нелинейный закон управления в виде обратной связи получен в результате выделения потенциального поля из векторного поля, образованного всевозможными векторами коэффициентов обратной связи для линеаризованных систем.

Постановка задачи

Пусть объект управления описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\quad x(0)=x^0,\ t\in[0,\infty), \qquad (1)$$

где x – n-мерный вектор состояния; u – m-мерный вектор управления; x^0 – начальное состояние, функция f определена в некоторой области $G\times U$ из произведения пространств $R^n\times R^m$ и имеет в этой области непрерывные частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$, не зависящие от управления u. Символы $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$ обозначают матрицы частных производных векторной функции f по переменным состояния x и управления u. Принятое допущение, что частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$ не зависят от u, означает независимость свойств линеаризованных систем от управления в данный момент времени.

Для подавляющего большинства объектов задачи синтеза нелинейного управления в виде обратной связи могут быть поставлены таким образом, чтобы удовлетворялись сформулированные выше ограничения на функцию f. Множество G в пространстве состояний определяет область допустимых режимов работы объекта.

С матоматической точки зрения полагаем, что это множество является замкнутым и имеет Липшицеву границу Г.

Пусть u^* – некоторое фиксированное значение управления и x^* – некоторое фиксированное значение вектора состояния, тогда линеаризованная система имеет вид

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*)\delta u(t) + f(x^*, u^*), \qquad (2)$$

где $\delta x(t) = x(t) - x^*$, $\delta u(t) = u(t) - u^*$, $\delta x(0) = x^0 - x^{*0}$.

Дифференциальное уравнение (2) описывает свойства нелинейной системы (I) в некоторой окрестности относительно состояния x^* и управления u^*.

Допустим, что линейные законы управления в виде обратной связи для линеаризованных систем, обеспечивающие необходимые им динамические свойства, известны и имеют вид [I, 2]

$$\delta u(t) = -L(x^*)\delta x(t), \qquad (3)$$

где L – некоторая матрица обратной связи.

Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что управление u является скалярным и L представляет собой вектор-строку. Случай векторного управления следует непосредственно из рассмотрения скалярного случая.

Поставим задачу: рассчитать закон управления $u(x)$ в виде обратной связи для нелинейной системы (I), обеспечивающий заданные свойства линеаризованных замкнутых систем вблизи каждого состояния x^*.

Нетрудно показать, что в общем случае такого закона управления не существует. Линеаризованная система (I) с законом управления $u(x)$ имеет вид

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*)\frac{\partial u}{\partial x}(x^*)\delta x(t), \qquad (4)$$

где $u^* = u(x^*)$.

Для того, чтобы линеаризованная система (4) обладала заданными свойствами, в соответствии с (3) необходимо выполнение равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*) = -L(x^*). \qquad (5)$$

Если потребовать, чтобы овойства линоаризованных систем обеспечивелись для каждого оостояния x^* , то (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = -L(x), \ x \in G, \qquad (6)$$

т.е. вектор-строке $L(x)$ должна быть градиентом некоторой скелярной функции.

Необходимым и достаточным уоловием существования функции u , удовлетворяющей (6), является равенство частных производных [3]

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \ell_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

где принято, что $L(x) = (\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x))$.
Поскольку элементы метрицы L определяются только из условия получения заданных динамических свойств линеаризованных систем, то условие (7) практически никогда выполняться точно не будет.

Зедачу синтеза нелинейного зекона управления из множестве законов управления сформулируем в оледующем виде.

Задача расчета потенциального управления. Определить закон управления в виде обратной овязи, обеспечивающий минимум функционала

$$\varkappa(u) = \int_G \left\| \frac{\partial u}{\partial x} + L(x) \right\|^2 dx, \qquad (8)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму векторов и матриц в конечномерных проотренотвах.

Смысл функционала (8) на языке теории поля оootoит в том, что из векторного поля, порождаемого множеством векторов обратной связи L , выделяется потенциальное поле.

Введение функционала $\varkappa(u)$ вида (8) не является единственно приемлемым. В зависимоoти от конкретной физичеокой зедачи в функционел (8) можно, например, ввеоти веоовую функцию, позволяющую обеспечить более точное приближение желаемых овойств замкнутой сиотемы в веденном подмножеотве допуотимой области G .

Важно отметить, что в предлагаемом подходе вид функционала (8) должен слабо влиять на свойства замкнутой системы, которые в основном должны определяться векторной функцией $L(x)$. Если это не выполняется, то следует изменить желаемые свойства линеаризованных систем, приводящие к изменению векторной функции $L(x)$.

Функционал типа (8) допускает наиболее простое решение задачи на минимум, что является очень важным для практического применения предлагаемого метода.

Решение задачи расчета потенциального управления

В предыдущем разделе задача расчета потенциального управления поставлена из обычных физических соображений. Для корректной математической постановки задачи необходимо рассмотреть класс функций, на котором будем искать минимум функционала (8). В качестве пространства функций выберем гильбертово пространство $W_2^{(1)}(G)$ функций u, имеющих обобщенные производные $\partial u/\partial x$ из пространства $L_2(G)$ интегрируемых с квадратом функций [4].

Конструкция пространства $W_2^{(1)}(G)$ достаточно сложная, но совершенно необходима для решения вопроса о существовании решения задачи расчета потенциального управления. Отметим основные элементы структуры пространства $W_2^{(1)}(G)$ [4].

Как известно, пространство $L_2(G)$ представляет собой пространство измеримых функций, суммируемых с квадратом, т.е. для каждой функции u из $L_2(G)$ величина $\int u^2(x)dx$ существует и конечна. Интеграл понимается в смысле Лебега. Скалярное произведение функций из $L_2(G)$ определяется соотношением

$$(u,\vartheta)_{L_2(G)} = \int_G u(x)\vartheta(x)dx \,. \qquad (9)$$

Для некоторых функций из $L_2(G)$ можно ввести еще одно скалярное произведение. При этом нам понадобится понятие обобщенной производной.

Отображение $\partial u/\partial x$ является обобщенной производной первого порядка функции $u \in L_2(G)$, если для каждого элемента $\Phi \in C_0^\infty(G)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_G \frac{\partial u}{\partial x}(x)\Phi(x)dx = -\int\limits_G u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)dx, \qquad (10)$$

где $C_0^{\infty}(G)$ обозначает пространство основных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Естественно, что если функция u дифференцируема в обычном смысле, то обобщенная производная совпадает с обычной производной.

Используя понятие обобщенной производной, введем для подмножества функций из $L_2(G)$, имеющих обобщенные производные первого порядка, скалярное произведение

$$(u,\vartheta)_{W_2^{(1)}(G)} = (u,\vartheta)_{L_2(G)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{dx}\right)_{L_2(G)}, \qquad (11)$$

где для векторных функций (вектор-строк) принято

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{dx}\right)_{L_2(G)} = \int\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} dx. \qquad (12)$$

Штрих обозначает операцию транспонирования матриц.
Подпространство функций из $L_2(G)$ со скалярным произведением (11) образует пространство $W_2^{(1)}(G)$, если граница Г области G Липшицева [4].

Липшицева граница представляет собой гиперповерхность n-мерного пространства, в окрестности каждой точки которой можно ввести локальные координаты и описать участки гиперповерхностей в этих локальных координатах Липшицевыми функциями. Области, имеющие гладкие или кусочно гладкие границы без особых точек, заведомо являются Липшицевыми.

В соответствии с определенным выше скалярным произведением (11) метрика в $W_2^{(1)}(G)$ определяется равенством

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} = (u,u)_{W_2^{(1)}(G)}. \qquad (13)$$

Пространство $W_2^{(1)}(G)$ содержит плотное подпространство $C^{\infty}(G)$ непрерывных и дифференцируемых функций и поэтому каждый элемент из $W_2^{(1)}(G)$ может быть с произвольной степенью точности в метрике (13) аппроксимирован бесконечно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим задачу отыскания элемента $u^0 \in W_2^{(1)}(G)$, доставляющего минимум функционалу (8). Для удобства дальнейшего изложения представим функционал (8) в виде

$$\text{æ}(u) = \int_G \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx + 2 \int_G \frac{\partial u}{\partial x}(x) \cdot L^{\prime}(x) dx + \int_G \| L(x) \|^2 dx. \qquad (14)$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\text{æ}(u) = \int_G \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx - 2 \int_G u(x) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(x)}{\partial x_i} \right) dx + 2 \int_\Gamma u(x) L(x) \nu dS + \int_G \| u(x) \|^2 dx, \qquad (15)$$

где ν – внешняя нормаль к Г.

В [4] показано, что минимум функционала (15) на пространстве $W_2^{(1)}(G)$ достигается на некотором элементе u^0. Любые два минимизирующих управления u^0 отличаются на постоянную почти всюду на G. Функции u^0 являются слабыми решениями уравнения Пуассона

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i}{\partial x_i}, \quad x \in G \qquad (16)$$

с краевым условием на границе

$$\frac{\partial u}{\partial x} \nu = - L \nu, \quad x \in \Gamma. \qquad (17)$$

Слабое решение существует тогда и только тогда, когда

$$\int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma L \nu dS = 0. \qquad (18)$$

Управление u^0 может быть приближенно получено с любой точностью по методу Ритца и, следовательно, с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Это открывает возможность эффективного численного решения задачи расчета потенциального управления с помощью МКЭ.

Некоторые свойства систем с потенциальным управлением

Как уже отмечалось выше, потенциальный закон управления $u(x)$ решает задачу "сшивания" линейных законов управления, рассчитанных для каждой точки линеаризации из области G. Таким образом, необходимые динамические свойства нелинейных

систем обеспечиваются на этапе линейного синтеза. Наиболее предпочтительной для практических вычислений является методика линейного синтеза, основанная на задании желаемых собственных значений и векторов матриц динамики [I, 2].

Поскольку не существует законов управления в виде обратной связи, обеспечивающих произвольные заданные свойства линеаризованным системам, то потенциальный закон управления обеспечивает приближенное выполнение заданных свойств в каждой точке линеаризации замкнутой системы из области G. Точные количественные оценки степени приближения зависят от скорости изменения свойств исходных линеаризованных систем и от качества рассчитанных для них линейных законов управления.

В качестве примера рассмотрим устойчивость замкнутой системы с потенциальным управлением. Замкнутая система с потенциальным управлением $u(x)$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u(x)). \qquad (I9)$$

Функцию Ляпунова для системы (I9) запишем в виде

$$\vartheta(x) = f'(x, u(x)) V(x) f(x, u(x)), \qquad (20)$$

где $V(x)$ – некоторая симметричная матрица.
Полная производная функции ϑ в силу системы (I9) имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = f'(x, u(x)) (A'(x) V(x) + V(x) A(x) + \dot{V}) f(x, u(x)), \qquad (2I)$$

где

$$A(x) = \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \qquad (22)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} (I_n \otimes f(x, u(x))). \qquad (23)$$

Матрица $\partial V(x)/\partial x$ является прямоугольной и имеет размерность $n \times n^2$ и получается заменой каждого элемента V_{ij} матрицы V на строку $\partial V_{ij}/\partial x$. Знак " $\otimes$ " обозначает тензорное произведение матриц, I_n – единичная матрица размерности $n \times n$.

Матрицу $V(x)$ выберем с помощью матричного уравнения Ляпунова

$$A'(x)V(x)+V(x)A(x)=-Q, \qquad (24)$$

где Q - некоторая положительно определенная матрица.

Если потенциальный закон управления обеспечивает приемлемые динамические свойства замкнутым линеаризованным системам (т.е. заданные расположения в левой полуплоскости собственных значений и необходимые направления собственных векторов матриц динамики $A(x)$ для каждого x из G) , то $V(x)$ будет положительно определенной матрицей $\forall x \in G$.

В случае, когда нелинейная система (19) имеет одну точку равновесия в области G , траектории системы будут отремиться к этой точке равновесия, если матрица

$$M(x)=A'(x)V(x)+V(x)A(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(I_n \circ f(x,u(x))\right)=-Q+\frac{\partial V(x)}{\partial x}\times \qquad (25)$$

$$\times\left(I_n \circ f(x,u(x))\right)$$

является отрицательно определенной в G . Производное отображение $\partial V(x)/\partial x$ можно определить путем дифференцирования (24). В результате получим систему матричных уравнений

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}A(x)+A'(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}=-\left(V(x)\frac{\partial A(x)}{\partial x_i}+\frac{\partial A'(x)}{\partial x_i}V(x)\right),\ i=1,\dots,n. \qquad (26)$$

Анализ уравнений (26) показывает, что для получения устойчивой системы с потенциальным управлением желательно обеспечить медленное изменение свойств замкнутой линеаризованной системы в пределах области G .

Заключение

В работе предложен метод расчета нелинейных систем путем "сшивания" законов управления для линеаризованных систем. Численное отыскание нелинейных потенциальных законов управления осуществляется с помощью метода конечных элементов. Пример расчета потенциального управления методом конечных элементов представлен в [5] . Предложенный метод без существенных изменений пригоден для расчета нестационарных и дискретных систем управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ооотнин А.Н. Инженерная методика модального синтеза динамических регуляторов для многосвязных систем / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1985. Деп.в ВИНИТИ, 1985, № 5305. 39 с.

2. Ооотнин А.Н. Выбор желаемых собственных значений и векторов при синтезе линейных систем управления / Урал.политехн. ин-т. Свердловск, 1986. Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 1727. 53 с.

3. Шварц Л. Анализ. В 2 т. Т.2. М., 1972. 528 с.

4. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985. 590 с.

5. Ооотнин А.Н., Алесенко Л.П., Найфельд Г.И. Метод расчета законов управления для нелинейных систем с заданными локальными свойствами / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1987. Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 5136. 15 с.

УДК 62.50

А.Н.Ооотнин, Л.П.Алесенко
(Уральский политехнический институт)

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

Метод расчета нелинейных законов управления в виде обратных связей для класса нелинейных систем предложен в [1]. Этот метод позволяет получать потенциальные законы управления для нелинейных систем через законы управления для линеаризованных систем.

Пусть уравнения динамики нелинейной системы имеют вид

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\quad x(0)=x^0,\quad t\in[0,\infty), \qquad (1)$$

где $x\in G\subset R^n$, $u\in R^1$, функция f непрерывно дифференцируема и матрицы частных производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$ не зависят от управления $u(t)$.

Полагаем, что для каждой точки линеаризации x^* в множестве G и для фиксированного u^* известен закон управления для линеаризованной системы

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u, \qquad (2)$$

имеющий вид

$$\delta u(t) = -L(x^*)\delta u(t), \qquad (3)$$

где $\delta x = x - x^*$, $\delta u = u - u^*$, $L(x^*)$ – вектор обратной связи для линеаризованной системы.

Потенциальный закон управления минимизирует выпуклый функционал

$$\varkappa(u) = \int_G \left\| \frac{\partial u}{\partial x} + L(x) \right\|^2 dx \qquad (4)$$

на пространстве $W_2^{(1)}(G)$ [I, 2], и является слабым решением уравнения в частных производных типа Пуассона [I]

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ell_i}{\partial x_i} \qquad (5)$$

с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial x}\nu = -L\nu$, $x \in \partial G$; (ν – внешняя нормаль к ∂G).

Хотя потенциальное управление $u(x)$ является решением уравнения в частных производных типа Пуассона (5), использовать его для численного нахождения решения рассматриваемой задачи управления (I)-(4) неэффективно. Наиболее предпочтительным является непосредственное нахождение минимума функционала (4) с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Суть метода заключается в разбиении области G на конечные элементы, т.е. на множества G_i, $G = \bigcup_{i=1} G_i$, в пределах которых задаются интерполяционные полиномы $u^i(x)$, определяемые узловыми значениями, с последующей минимизацией функционала по узловым значениям.

Численный алгоритм расчета управления

Согласно требованиям к МКЭ из [3], представим замкнутую область G с непрерывной по Липшицу границей в виде объединения замкнутых с непустой внутренностью непересекающихся множеств G_i, т.е.

$$G = \bigcup_{i=1}^{K} G_i, \qquad (6)$$

где k – количество конечных элементов; G_i – некоторые замкнутые области, называемые в дальнейшем конечными элементами. Пусть в пределах каждого конечного элемента $G_i \subset R^n$ искомая функция u представлена интерполяционным многочленом $u^i(x)$, $i=\overline{1,k}$. Каждый интерполяционный полином является функцией узловых значений:

$$U = (u(x_1), \dots, u(x_p))', \qquad (7)$$

где $x_1, \dots, x_p$ – узловые значения; $u(x_1), \dots, u(x_p)$ – искомые узловые значения; p – количество узловых значений.

Интерполяционный полином в пределах элемента G_i записываем в виде

$$u^i(x) = N_i(x)U, \quad x \in G_i, \quad i = \overline{1,k}, \qquad (8)$$

где $N_i(x) = (N_{i1}(x), \dots, N_{ip}(x))$ – функция формы, определяемая видом интерполяционного полинома. Любая функция формы обладает свойством

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j \notin G_i; \\ e_j, & x_j \in G_i, \end{cases} \qquad (9)$$

где e_j – вектор с единичным j-м элементом и нулевыми остальными элементами.

В результате разбиения области G на конечные элементы и введения интерполяционных многочленов функционал (4) примет вид

$$\varkappa(u) = \sum_{i=1}^{k} \varkappa_i(u^i), \qquad (10)$$

где

$$\varkappa_i(u^i) = \int_{G_i} \left\| \frac{\partial u^i(x)}{\partial x} \right\|^2 dx + 2\int_{G_i} \frac{\partial u^i}{\partial x} L'(x)dx + \int_{G_i} \|L(x)\|^2 dx. \qquad (11)$$

С учетом (8) функционал $\varkappa(u)$ будет функцией узловых значений

$$\varkappa(u) = \hat{\varkappa}(U) = \sum_{i=1}^{k} \hat{\varkappa}_i(U), \qquad (12)$$

где

$$\hat{\varkappa}_i(U) = \int_{G_i} \left\| U' \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\|^2 dx + 2\int_{G_i} U' \frac{\partial N_i}{\partial x} L'(x)dx + \int_{G_i} \|L(x)\|^2 dx. \qquad (13)$$

Дифференцируя (I2) по вектору U получаем необходимое и достаточное условие минимума

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_{G_i}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)' dx\right\} U = -\sum_{i=1}^{k}\int_{G_i}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) L'(x)dx . \qquad (I4)$$

Соотношение (I4) представляет собой систему линейных уравнений относительно вектора узловых значений U .

Уравнение (I4) всегда разрешимо относительно U и имеет бесчисленное множество решений вида

$$U^{0} = U^{*} + v\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} , \qquad (I5)$$

где U^{*} – одно из решений; v – произвольное число.

Минимум функционала (4) определяется с точностью до постоянной функции. Если в (I4) задать одно из узловых значений, или к (I4) добавить уравнение, определяющее функцию u^{0} в заданной точке, то получившаяся система уравнений будет иметь единственное решение.

Если конечные элементы G_i представляют собой симплексы, то согласно [4] можно использовать линейные интерполяционные полиномы $u^{i}(x)$, $i=\overline{1,k}$. В этом случае отображения $\partial N_i/\partial x$ не зависят от x и система (I4) примет вид

$$\left(\sum_{i=1}^{k} v_i\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)'\right) U = -\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) L'_{G_i} , \qquad (I6)$$

где $v_i = \int_{G_i} dx$ – объем области G_i ; (I7)

$$L_{G_i} = \int_{G_i} L(x)dx . \qquad (I8)$$

Рассмотрим последний вариант более подробно. Поскольку G_i является n -симплексом, то он является выпуклой оболочкой $n+1$ точек из пространства R^{n} . Обозначим эти точки соответственно $y_1^{i}, y_2^{i}, \dots, y_{n+1}^{i}$, тогда

$$G_i = \left\{x \,/\, x = \sum_{j=1}^{n+1} y_j^{i}\alpha_j ;\ \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j = 1,\ 0 \le \alpha_j \le 1,\ j=\overline{1,n+1}\right\} . \qquad (I9)$$

В соответствии с принятыми ранее обозначениями можно также полагать, что узловые значения $x_1, \dots, x_p$ являются одновременно вершинами симплексов.

Линейный интерполяционный полином $u^i(x)$ запишем в векторно-матричном виде

$$u^i(x)=M^i\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix},\ i=\overline{1,K}, \qquad (20)$$

где M^i – вектор-строка размерности $n+1$. Для записи функции формы $N_i(x)$ необходимо представить M^i через узловые значения управления. Нетрудно видеть, что

$$M^i=(u(y_1^i),\ldots,u(y_{n+1}^i))\left(\begin{array}{c|c|c}1&\cdots&1\\y_1^i&\cdots&y_{n+1}^i\end{array}\right)^{-1} \qquad (21)$$

(20) можно представить в другой форме:

$$u^i(x)=(u(y_1^i),\ldots,u(y_{n+1}^i))\left(\begin{array}{c|c|c}1&\cdots&1\\y_1^i&\cdots&y_{n+1}^i\end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}= \qquad (22)$$

$$=(1\ x)'\begin{pmatrix}1\ (y_1^i)'\\ \hline 1\ (y_{n+1}^i)'\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u(y_1^i)\\ \hline u(y_{n+1}^i)\end{pmatrix}=N_i(x)U.$$

Таким образом, функция формы $N_i(x)$, выраженная через те "реальные" узловые значения $x_1,\ldots,x_p$ на n-симплексе G_i, имеют вид

$$N_i(x)=(1\ x)'\begin{pmatrix}1\ (y_1^i)'\\ \hline 1\ (y_{n+1}^i)'\end{pmatrix}^{-1}E_i, \qquad (23)$$

где соответствующая G_i матрица E_i состоит из нулей и единиц; ее строки являются относительными координатами $u(y_1^i),\ldots,u(y_{n+1}^i)$ в столбце U из уравнения (16):

$$\begin{pmatrix}u(y_1^i)\\ \hline u(y_{n+1}^i)\end{pmatrix}=E_iU. \qquad (24)$$

Производная функции формы:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=E_i'\left(\begin{array}{c|c|c}1&\cdots&1\\y_1^i&\cdots&y_{n+1}^i\end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\,0\ldots0\\ \hline I_n\end{pmatrix}', \qquad (25)$$

где I_n – единичная матрица размерности n.

Объем n-мерного симплекса G_i с вершинами $y_1^i,\ldots,y_{n+1}^i$ определяется формулой:

$$\vartheta_i = |\det h^i| \frac{1}{n!} \, , \qquad (26)$$

где h^i – матрица преобразования

$$h^i = (y^i - y_1^i | \dots | y_{n+1}^i - y_1^i) . \qquad (27)$$

При вычислении выражения (I8) следует учесть, что вектор-строки обратной связи $L(x)$ рассчитываются с помощью целого комплекса программ для решения задач линейного синтеза, поэтому точное вычисление интеграла (I8) является времяемкой процедурой. С другой стороны, если разбиение области G на элементы G_i достаточно мелкое, то $L(x)$ будет слабо изменяться в пределах G_i, поэтому интеграл (I8) можно вычислять с помощью теоремы о среднем, фиксируя какое-либо значение x_*^i из области G_i и полагая, что

$$L_{G_i} \approx L(x_*^i) \int_{G_i} dx = L(x_*^i) \vartheta_i \, . \qquad (28)$$

В качестве x_*^i рационально выбирать точку, близкую к "центру" симплекса, например в центре тяжести симплекса.

Более точные результаты можно получить, если ввести интерполяционные полиномы для $L(x)$, используя в качестве узловых значений вершины симплекса. Если принять линейный закон интерполяции, то

$$L(x) \approx \sum_{j=1}^{n+1} L(y_j^i) \alpha_j \, , \quad x \in G_i \, , \qquad (29)$$

где α_j – относительные координаты точки x в симплексе G, определяемые согласно (I9). После несложных вычислений получим

$$L_{G_i} \approx \vartheta_i \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} L(y_j^i) . \qquad (30)$$

Алгоритм расчета потенциального уравнения получается на основе соотношений (I6), (25), (26), (27) и (30). Как уже отмечалось выше, для однозначной разрешимости системы (I6) необходимо задаваться величиной управления u в произвольной точке x области G. Величину u удобно задать в точке равновесия нелинейной системы так, чтобы выполнялось условие $f(x^*, u(x^*)) = 0$.

Для уменьшения объема вычислительной работы при решении системы линейных уравнений (I6) необходимо специальным образом вводить нумерацию узловых значений (координат вершин симплекса). При правильной нумерации вершин симплексов получится ленточная структура матрицы системы линейных уравнений. Поскольку нумерация вершин симплексов имеет большое значение, рассмотрение этого вопроса выделим в следующий раздел.

Разбиение многомерной области на конечные элементы

В данном разделе рассматриваются области в виде многомерного параллелепипеда. Более сложные области могут быть рассмотрены с использованием комформного отображения на соответствующий многомерный параллелепипед. В задачах управления обычно нет необходимости рассматривать сложные области, поскольку конфигурации областей определяются допустимыми режимами работы объектов управления в пространстве состояний.

В n -мерном пространстве рассмотрим область G в виде прямоугольного параллелепипеда. Предположим также, что используются равномерные сетки разбиения по каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$ с количеством узлов $q_1, \ldots, q_n$ соответственно. Для определенности считаем, что переменные состояния $x_1, \ldots, x_n$ пронумерованы так, что числа $q_1, \ldots, q_n$ расположены в порядке возрастания.

Разбиение параллелепипеда G на симплексы и нумерация узлов осуществляются в два этапа. На первом этапе G разбивается на элементарные параллелепипеды меньшего объема и специальным образом нумеруются узловые значения для получения минимальной ширины ленты матрицы в (I6). На втором этапе элементарные параллелепипеды разбиваются на симплексы.

Вершины элементарных параллелепипедов нумеруются по слоям. Каждый (n - I)-мерный слой получается путем сечения n -мерного параллелепипеда гиперплоскостью, ортогональной координате x_n с самым большим количеством узловых точек q_n. Координаты вершин нумеруются последовательно от первого слоя до последнего с номером q_n. В свою очередь нумерация каждого (n - I)-мерного слоя осуществляется по (n - 2)-мерным слоям. Для этого проводятся сечения (n - I)-мерного слоя гиперплос-

костями, ортогональными координате x_{n-1} в соответствии с принятым разбиением по этой координате.

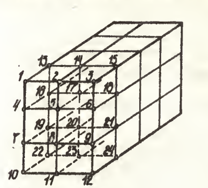


Рис.I. Пример 3-мерного параллелепипеда

Пример разбиения трехмерного параллелепипеда на элементарные и нумерации вершин представлен на рис.I.

После нумерации вершин элементарных n-мерных параллелепипедов осуществляется их разбиение на n-мерные симплексы. Процедура разбиения одинакова для всех элементарных параллелепипедов.

Проиллюстрируем сначала эту процедуру на примере разбиения 3-мерного куба, представленного на рис.2. Из геометрических соображений ясно, что каждый симплекс, лежащий в кубе, с общей вершиной в точке 0 может быть получен как выпуклая комбинация 4 точек, одна из которых 0, а три другие лежат на грани куба, не содержащей точку 0. Вопрос состоит в том, чтобы построить симплексы, заполняющие весь объем куба без общих внутренних точек.

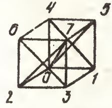


Рис.2. Разбиение куба на симплексы

Для разрешения этого вопроса введем обозначения e_1, e_2, e_3 для единичных ортов. Можно показать, что искомая система симплексов получается как выпуклые оболочки точек $\{0, e_i, e_i+e_j, e_i+e_j+e_k\}$, где i, j, k – произвольный набор различных индексов из трех чисел I, 2, 3 с всевозможными перестановками индексов. Общее количество симплексов для трехмерного случая 3!

Рассмотрим разбиение на симплексы n-мерного куба. Полагаем для простоты, что одна из его вершин совпадает с нача-

лом координат. Единичные орты обозначим через $e_1, \ldots, e_n$. Каждый симплекс является выпуклой оболочкой точек

$$\{0, e_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}+e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_1}+e_{\alpha_2}+\ldots+e_{\alpha_n}\},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – произвольный набор различных целых чисел от I до n. Общее число таких наборов равно $(n!)$. Таким образом, n-мерный куб разбивается на $n!$ n-мерных симплексов, полностью заполняющих его объем с общей вершиной.

Разбиение параллелепипедов на симплексы проводится аналогично. Рассмотренный выше алгоритм позволяет построить на ЭВМ процедуру разбиения многомерной области на симплексы и нумерации вершин с наименьшей шириной ленты матрицы в уравнении (I6).

Заключение

Процедура расчета потенциального управления достаточно сложна и ориентирована на реализацию в виде программного обеспечения для ЭВМ. Практическое использование авторами предлагаемой методики расчета законов управления для нелинейных систем показало ее высокую эффективность. В [I] достаточно подробно рассмотрен расчет потенциального управления для модельного примера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Оботнин А.Н., Алесенко Л.П., Найфельд Г.И. Метод расчета законов управления для нелинейных систем с заданными локальными свойствами / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, I987. Деп. в ВИНИТИ, I987, № 5I36-В87. I5 с.

2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., I985. 590 с.

3. Сёгерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., I979. 392 с.

4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., I980. 5I2 с.

УДК 620.975

А.М.Тарасьев, А.А.Успенский,
В.Н.Ушаков (ИММ УрО АН СССР)

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПОЗИЦИОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ С ВЫПУКЛОЙ ЦЕЛЬЮ

Рассматривается задача построения множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре сближения с выпуклой целью. Считается, что момент окончания игры фиксирован. Приводится алгоритм приближенного построения множества позиционного поглощения в случае фазового пространства R^m . Работа согласуется с исследованиями [I-9] .

I. Пусть задана конфликтно-управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \qquad (I.I)$$

здесь x-m-мерный фазовый вектор системы; u, v - векторы управляющих воздействий I-го и 2-го игроков, удовлетворяющие ограничениям

$$u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q, \qquad (I.2)$$

где P и Q - компакты, R^p и R^q - евклидовы пространства; $A(t), B(t), C(t)$ - непрерывные на заданном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta)$ матрицы-функции.

В задаче о сближении, стоящей перед I-м игроком, требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ системы (I.I) в момент ϑ на компактное выпуклое целевое множество M , содержащееся в фазовом пространстве R^m . Эту задачу можно решать с помощью экстремальной конструкции [I-3] , основным элементом которой является построение множества позиционного поглощения. Согласно определению [I] , множество позиционного поглощения есть множество всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^m$, из которых разрешима задача сближения. Зная матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и целевое множество M , мы можем легко найти ту ограниченную область $D \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$, в которой содержится множество позиционного поглощения. Область D назовем пространством позиций $z = (t, x)$ игры.

Введем вспомогательные понятия и обозначения:

$$f(t,x,u,v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v\ ;$$

$$\rho(t,x,\ell) = \max_{u\in P}\ \min_{v\in Q}\ \ell' f(t,x,u,v)\ ;$$

$$F(t,x) = co\{f : f = f(t,x,u,v),\ u\in P,\ v\in Q\}\ ;$$

$$F_\ell(t,x) = \{f : f\in F(t,x),\ \ell' f \le \rho(t,x,\ell)\}\ ;$$

$$S = \{\ell : \ell\in R^m,\ \|\ell\| = 1\}\ ,$$

где символ $co\{f\}$ означает выпуклую оболочку множества $\{f\}$; ℓ – вектор из S ; $\|\ell\|$ – евклидова норма вектора ℓ .

Символом $X_\ell(t^*;\ t_*,\ x_*)\ (t_* < t^*)$ обозначим множество всех точек $x^*\in R^m$, в которые приходят в момент t^* решения $x[t]\ (t\in[t_*,\ t^*])$ дифференциального включения $\dot x\in F_\ell(t,x),\ x[t_*] = x_*$.

<u>Определение</u>. Множеством позиционного поглощения W^0 назовем максимальное из множеств W в пространстве позиций D , удовлетворяющих условиям:

I. $W_\vartheta \subset M$;

2. Для любых двух моментов $t_*,\ t^*(t_0\le t_* < t^*\le\vartheta)$ любой точки $x_*\ (x_*\in W_{t_*})$ и любого вектора $\ell\ (\ell\in S)$ имеет место

$$W_{t^*}\cap X_\ell(t^*;\ t_*,\ x_*) \ne \varnothing\ ,$$

здесь $W_t = \{x : x\in R^m,\ (t,x)\in W\}$.

Будем предполагать, что выполняется условие E :

$$\rho_*(t,x,\ell) < \rho(t,x,\ell) < \rho^*(t,x,\ell),\ (t,x,\ell)\in D\times S\ ,$$

где

$$\rho_*(t,x,\ell) = \min_{(u,v)\in P\times Q}\ \ell' f(t,x,u,v)\ ;$$

$$\rho^*(t,x,\ell) = \max_{(u,v)\in P\times Q}\ \ell' f(t,x,u,v).$$

Отметим, что в [2] вводятся множества

$$F_\ell^*(t,x)=F^*(t,x)\cap\{f: f\in R^m, \ell' f\le \rho(t,x,\ell)\},$$

где $F^*(t,x)$ – некоторый шар в пространстве R^m с центром в начале координат и достаточно большим радиусом.

Если обозначить при этом

$$\rho_*(t,x,\ell)=\min_{f\in F^*(t,x)} \ell' f \; ; \; \rho^*(t,x,\ell)=\max_{f\in F^*(t,x)} \ell' f \qquad (I.3)$$

и заменить фигурирующие в условии E функции $\rho_*(t,x,\ell)$, $\rho^*(t,x,\ell)$ функциями (I.3), то условие E будет заведомо выполняться.

Пусть выбрано разбиение $\Gamma=\{t_0,t_1,\dots,t_N=\vartheta\}$. Полагаем $\Delta_i=t_{i+1}-t_i$. Определим числа $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_i=\omega(\Delta_{i-1})+(1+\Lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$, $i=1,\dots,N$, где $\omega(\Delta)$ – некоторая функция, монотонно убывающая, такая, что

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{\omega(\Delta)}{\Delta}=0\; ; \quad \Lambda=\max_{t\in[t_0,\vartheta]}\|A(t)\|.$$

Для выбранного разбиения Γ определим последовательность множеств W_{t_i}, $i=N, N-1,\dots,0$. Полагаем

$$W_{t_N}=M_{\varepsilon_N}=\{w: w\in R^m, \min_{w^*\in M}\|w^*-w\|\le\varepsilon_N\}.$$

Пусть множество $W_{t_{i+1}}$ уже построено. Полагаем

$$W_{t_i}=\{w\in R^m: W_{t_{i+1}}\cap\tilde X_\ell(t_{i+1};t_i,w)\ne\varnothing$$

при любом $\ell\in S\}$, где $\tilde X_\ell(t^*;t_*,w_*)=w_*+(t^*-t_*)F_\ell(t_*,w_*)$

Определенной здесь системе множеств $W_{t_i}\subset R^m$, $i=0$, $1,\dots,N$ можно поставить в соответствие множество

$$W(\Gamma)=\{(t,w): w\in W_{t_i}, t_{i-1}<t\le t_i, i=1,\dots,N\}.$$

Известно, что $\rho(W(\Gamma),W^0)\to 0$ при $diam(\Gamma)\to 0$ [8], где $diam(\Gamma)=\max_{i=0,1,\dots,N}|t_{i+1}-t_i|$.

Символ $\rho(W(\Gamma),W^0)$ означает хаусдорфово расстояние [10] между множествами $W(\Gamma)$ и W^0.

Цель настоящей статьи – описание алгоритма построения системы множеств W_{t_i}, $i=0,1,\dots,N$, которую назовем аппроксимирующей системой множеств, отвечающей разбиению Γ.

Построение аппроксимирующей системы множеств $\{W_{t_i} : i = N, N-1, \ldots, 0\}$ осуществляется согласно определению с помощью попятной процедуры от множества W_{t_N}, рассматриваемого в конечный момент времени ϑ к множеству W_{t_0}, рассматриваемому в начальный момент времени t_0. На каждом этапе $[t_i, t_{i+1}]$ конструируем множество W_{t_i}, исходя из построенного на предыдущем этапе $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ множества $W_{t_{i+1}}$. При этом на исходном этапе попятной процедуры полагаем $W_{t_N} = W_{\vartheta} = M_{\varepsilon_N}$.

Для построения множества W_{t_i} $(i < N)$ обозначим

$$M_{t_{i+1}}(x[t_i]) = W_{t_{i+1}} \cap \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]).$$

Здесь

$$\tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) = x[t_i] + \Delta_i F(t_i, x[t_i]), \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i.$$

Теорема I.

$$W_{t_i} = \{x[t_i] \in R^m : \max_{\ell \in S} \varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) \leq 0\},$$

где $\varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = -\ell' x[t_i] - \Delta_i \rho(t_i, x[t_i], \ell) + \rho_{M_{t_{i+1}}(x[t_i])}(\ell);$

$$\rho_{M_{t_{i+1}}(x[t_i])}(\ell) = \begin{cases} \min\limits_{w \in M_{t_{i+1}}(x[t_i])} \ell' w, & \text{если } M_{t_{i+1}}(x[t_i]) \neq \Phi; \\ +\infty, & \text{если } M_{t_{i+1}}(x[t_i]) = \Phi. \end{cases}$$

В силу линейности системы (I.I) и выпуклости цели M, множества W_{t_i}, $i = 0, 1, \ldots, N$ выпуклы, и, следовательно, выпуклы множества $M_{t_{i+1}}(x[t_i])$ при любых $x[t_i] \in R^m$ и $i = 0, \ldots, N-1$.

Предполагаем, что наряду с условием E выполняется условие H: множество $W_{t_{i+1}}$ при любом $i = 0, \ldots, N-1$ имеет непустую внутренность $\operatorname{int} W_{t_{i+1}}$.

При приведенных выше предположениях E и H выполняется следующее утверждение.

Теорема 2. $\max\limits_{\ell \in S} \varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) =$

$$= \max_{\ell \in L^0(x[t_i])} \varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = 0,$$

где $L^0(x[t_i])$ – замыкание множества векторов ℓ из S внутренних нормалей к $M_{t_{i+1}}(x[t_i])$ в точках множества

$$\Lambda_0(x[t_i]) = \partial M_{t_{i+1}}(x[t_i]) \cap \operatorname{int} \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]).$$

Здесь символ $\partial\Phi$ означает границу множества Φ.

Заметим, что соотношение $\max\limits_{\ell \in L^0(x[t_i])} \varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = 0$, являющееся критерием принадлежности точки $x[t_i]$ границе множества W_{t_i}, недостаточно удобно для конкретной реализации попятной процедуры на ЭВМ вследствие того, что максимум в левой части этого соотношения вычисляется на множестве, зависящем от искомой точки $x[t_i]$, поэтому сделаем следующий переход.

Пусть $x[t_{i+1}] \in \partial W_{t_{i+1}}$. Поставим в соответствие точке $x[t_{i+1}]$ множество $M^r_{t_{i+1}}(x[t_{i+1}]) = W_{t_{i+1}} \cap O_r$, где $O_r = \{x : x \in R^m, \|x - x[t_{i+1}]\| \le r\}$ $(r > 0)$.

При выборе числа r полагаем:

$$\varepsilon^r_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = -\ell' x[t_i] - \Delta_i \rho(t_i, x[t_i], \ell) + \rho_{M^r_{t_{i+1}}(x[t_{i+1}])}(\ell);$$

$$\Lambda_r(x[t_{i+1}]) = \operatorname{int} O_r \cap \partial M^r_{t_{i+1}}(x[t_{i+1}]), \quad L^r(x[t_{i+1}]) =$$

$$= c\ell\{\ell : \ell \in S,\ \ell'(x - y) \le 0 \text{ для всех } x \in M^r_{t_{i+1}}(x[t_{i+1}]),$$

где $y \in \Lambda_r(x[t_{i+1}])\}$.

Здесь символ $c\ell$ означает замыкание множества в R^m

Теорема 3. Пусть точка $\dot{x}[t_i]$ связана с точкой $x[t_{i+1}] \in \partial W_{t_{i+1}}$ соотношением $M_{t_{i+1}}(x[t_i]) \subset \operatorname{int} O_r$.

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1. $x[t_i] \in \partial W_{t_i}$;

$$2. \max_{\ell \in L^0(x[t_i])} \varepsilon_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = 0;$$

$$3. \max_{\ell \in L^r(x[t_i])} \varepsilon^r_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell) = 0. \qquad (I.4)$$

Соотношение (I.4) удобно тем, что максимум по ℓ функции $\varepsilon^r_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell)$ вычисляется на множестве $L^r(x[t_{i+1}])$, не зависящем от искомой точки $x[t_i]$.

Итак, в теореме 3 утверждается, в частности, что все граничные точки $x[t_i]$ множества W_{t_i}, и только они, удовлетворяют соотношению (I.4). Следовательно, перебирая точки $x[t_{i+1}]$ множества $\partial W_{t_{i+1}}$ и решая уравнение (I.4) относительно $x[t_i]$, мы выделим границу ∂W_{t_i} множества W_{t_i}, и, таким образом определим множество W_{t_i}.

Приведем описание конкретной вычислительной процедуры, которая включает в себя и вычисление значений

$$\max_{\ell \in L^r(x[t_{i+1}])} \varepsilon^r_{\Delta_i}(t_i, x[t_i], \ell).$$

Предполагаем, что в задаче сближения множества P, Q, M - выпуклые многогранники с конечным числом вершин.

Ниже описывается попятная вычислительная процедура построения системы множеств $\{\tilde{W}_{t_i} : t_i \in \Gamma\}$, близкой к системе множеств $\{W_{t_i} : t_i \in \Gamma\}$. Здесь близость множеств W_{t_i} и $\tilde{W}_{t_i}$ понимается в смысле хаусдорфовой метрики $\rho(W_{t_i}, \tilde{W}_{t_i})$; Γ - некоторое разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$, характер которого будет определен ниже.

Отметим, что факт неточного вычисления множеств W_{t_i}, $t_i \in \Gamma$ связан с тем, что попятную процедуру мы будем вести не от множества M_{ε_N}, а от множества M - выпуклого многогранника.

На начальном шаге процедуры полагаем $\tilde{W}_{t_N} = M$. В конечном счете процедура сводится к построению для каждого момента $t_i \in \Gamma$ границы ∂W_{t_i} множества W_{t_i} на основе информации об уже построенной границе $\partial \tilde{W}_{t_{i+1}}$ множества $\tilde{W}_{t_{i+1}}$ - выпуклого многогранника в пространстве R^m.

Все многогранники $\tilde{W}_{t_i}$ $(i = 0, 1, \dots, N)$ имеют одинаковое количество вершин, которое обозначим символом K.

Таким образом, многогранники $\tilde{W}_{t_i} (i = 0, 1, \ldots, N)$ можно представить в виде

$$\tilde{W}_{t_i} = \left\{ w : w = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k x^{(k)}[t_i], \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k \in \overline{1,K} \right\}.$$

Приведем рекуррентные формулы построения точек $x^{(k)}[t_i] \in \in \partial \tilde{W}_{t_i}$:

$$x^{(k)}[t_i] = x^{(k)}[t_{i+1}] + \gamma^{(k)} \ell^{(k)},$$

$$\gamma^{(k)} = \max_{\ell \in L^{\Gamma}(x^{(k)}[t_{i+1}])} \frac{\varepsilon^{\Gamma}_{\Delta_i}(t_i, x^{(k)}[t_{i+1}], \ell)}{\ell'(E + \Delta_i A(t_i))\ell^{(k)}} ;$$

$$\ell^{(k)} = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^{K} x^{(m)}[t_{i+1}] - x^{(k)}[t_{i+1}].$$

Числа Γ и Δ_i выбираются согласно равенствам

$$\Gamma = \max_{m, s (m \neq s)} \| x^{(m)}[t_{i+1}] - x^{(s)}[t_{i+1}] \|, \; m \in \overline{1,K}, \; s \in \overline{1,K};$$

$$\Delta_i = \Gamma \left(\max_{x \in \tilde{W}_{t_{i+1}}, u \in P, v \in Q} \| A(t_{i+1})x + B(t_{i+1})u + C(t_{i+1})v \| + 1 \right)^{-1}.$$

При указанных соотношениях для нахождения величин Γ и Δ_i множество $L^{\Gamma}(x^{(k)}[t_{i+1}])$ представляет собой многогранный конус, сопряженный конусу возможных направлений в точке $x^{(k)}[t_{i+1}]$ к множеству $\tilde{W}_{t_{i+1}}$. Это позволяет вести вычисление коэффициента $\gamma^{(k)}$ по формуле

$$\gamma^{(k)} = \Delta_i \max_{j, n, \ell \in L_{jn}} \left\{ - \frac{\ell' A(t_i) x^{(k)}[t_{i+1}] + \ell' B(t_i) u_j + \ell' C(t_i) v_n}{\ell'(E + \Delta_i A(t_i))\ell^{(k)}} \right\},$$

где $L_{jn} = L^{\Gamma}(x^{(k)}[t_{i+1}]) \cap S^u_j \cap S^v_n$; S^u_j – конус внешних нормалей в j -й вершине многогранника P ; S^v_n – конус внутренних нормалей в n -й вершине многогранника Q .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. 456 с.

2. Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // ДАН СССР. 1976. Т.226, № 6. С. 1260-1263.

3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Аппроксимация в дифференциальной игре // Прикл.матем. и мех. 1973. Т.37, вып.2. С.197-204.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н. Минимаксная дифференциальная игра // ДАН СССР. 1972. Т.206, № 2. С.277-280.

5. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх.I // ДАН СССР. 1967. Т.174, № 6. С.1278-1280.

6. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // ДАН СССР. 1967. Т.175, № 4. С.764-766.

7. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Построение системы множеств, аппроксимирующей максимальный минимаксно u -стабильный мост // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск, 1984. С.159-190.

8. Ушаков В.Н. К теории минимаксных дифференциальных игр.I / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. Деп.в ВИНИТИ, 1980. № 4425-80. 187 с.

9. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл.матем.и мех. 1987. Т.51, вып.2. С.216-222.

10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977. 622 с.

УДК 62-50

С.Т.Завалищин, О.И.Стародумов
(ИММ УрО АН СССР)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА В СРЕДЕ

Проектирование машин, предназначенных для работы в экстремальных условиях, является комплексной проблемой [1]. Она предусматривает ряд специфических задач по управлению механизмами. Задача об управлении перемещениями манипулятора [2, 3]

в среде ставится как вариационная, в которой качество управления оценивается по энергетическим затратам, требуемым на перемещения звеньев манипулятора. Поскольку эволюция манипулятора происходит в потенциальном поле силы тяготения, то такая задача динамической оптимизации равносильна минимизации энергетических затрат на преодоление силы сопротивления среды.

Поставленная задача имеет ряд особенностей. Во-первых, она нерегулярна [4] : уравнения Эйлера-Лагранжа не содержат управляющие моменты и, следовательно, не позволяют формально определить их оптимальные значения. Во-вторых, как выяснилось, энергосберегающие программы изменения управляющих моментов имеют импульсные составляющие, поэтому применение классических вариационных средств для решения задачи лишено логического основания. Третья особенность вытекает из второй и состоит в определении подсчета энергетических затрат. Очевидно, для этого надо определить корректный способ умножения импульсных управляющих моментов на разрывные реализации угловых скоростей звеньев манипулятора.

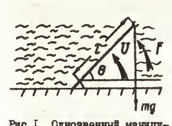


Рис.I. Однозвенный манипулятор

Цель данной заметки заключается в применении общего подхода [5] , позволяющего преодолеть перечисленные трудности и, в конечном случае, решить обсуждаемую задачу.

I. Рассмотрим сначала однозвенный манипулятор,показанный на рис.I. Предполагается, что вся масса m сосредоточена в схвате манипулятора. Движение происходит в вязкой среде, в которой сила сопротивления пропорциональна скорости перемещения массы m . Момент U , приложенный к звену, считается управляющим, а момент F - возмущающим. Применяя метод Лагранжа, получаем уравнение движения звена

$$mr^2\ddot{\theta} = -mgr\cos\theta + Q^c + U + F, \qquad \text{(I)}$$

где $Q^c = -ar^2\dot{\theta}$ – обобщенная сила сопротивления среды. Выражение для мощности имеет вид

$$\dot{A} = \dot{\theta} U \ , \ A(0) = 0. \qquad (2)$$

Задача I. Найти закон перемещения звена из начального положения $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ в конечное $\theta(t_p) = \theta_p$, $\dot{\theta}(t_p) = 0$, обеспечивающий наименьшее значение работы $A(t_p)$.

Дифференциальные связи (I), (2) в такой задаче составляют систему третьего порядка. Оказывается, что порядок этой системы можно понизить на единицу. Действительно, принимая обозначение

$$\dot{\theta} = \omega , \qquad (3)$$

разрешим уравнение (I) относительно управляющего момента

$$U = mr^2\dot{\omega} = mgr\cos\theta + ar^2\omega - F. \qquad (4)$$

Подстановка выражения (4) в уравнение (2) дает соотношение

$$\dot{A} = mr^2 w\dot{\omega} + mgr\omega\cos\theta + ar^2\omega^2 - Fw. \qquad (5)$$

Таким образом, выбор угловой скорости (3) в качестве управления позволяет ограничиться дифференциальными связями (3), (5).

Однако трудности, отмеченные во введении, сохраняются и для новой формулировки задачи. Так, первое слагаемое из правой части уравнения (5) очевидно, теряет смысл для разрывной программы изменения угловой скорости, что соответствует импульсному управляющему моменту.

В данной ситуации примем определение: $mr^2 w\dot{\omega} = -D(1/2 mr^2 w^2)$, где D – оператор обобщенного дифференцирования [6] . Для гладких функций $w(\cdot)$ такое определение совпадает с классическим результатом. Теперь выражение для работы допускает представление: $A = y + 1/2\, mr^2\omega^2$, где величина $y(\cdot)$ – решение уравнения (6). В результате получена стандартная задача оптимального управления

$$y(t_p) \longrightarrow min \ ;$$

$$\dot{\theta} = \omega \ , \ \theta(0) = \theta_0 \ ;$$

$$\dot{y} = mgr\omega\cos\theta + ar^2\omega^2 - F\omega\ , \quad y(0) = 0;$$

$$\theta(t_p) = \theta_p\ , \quad \omega(0) = \omega(t_p) = 0. \qquad (6)$$

Решая последнюю задачу с помощью принципа Лагранжа [7], можно получить следующий результат. Оптимальная программа изменения угловой скорости имеет вид

$$\omega_{opt} = (ar^2)^{-1}\left(F + t_p^{-1}\left(ar^2(\theta_p - \theta_0) - \int_0^{t_p} F d\tau\right.\right.$$

Если возмущающий момент $F = 0$, то видно, что $\omega_{opt} = t_p^{-1}(\theta_p - \theta_0)$, т.е. угловая скорость на всем промежутке управления постоянна. Таким образом, в ходе оптимального перемещения обобщенная сила сопротивления среды сохраняет постоянное значение. Согласно первому слагаемому выражения (4) получается, что оптимальная программа изменения управляющего момента имеет начальный и конечный импульсы с интенсивностью соответственно

$$mr^2\omega_{opt}\ ; \ -mr^2\omega_{opt}\ .$$

Далее перейдем к вопросу о синтезе оптимального управляющего момента. Если следовать идее [2] построения синтезирующей процедуры, исходя из оптимальных программ, то формально синтезирующая функция имеет вид $(F = 0)$

$$U(t,\theta,\dot{\theta}) = \begin{cases} -mr^2\left(\dot{\theta} - (t_p - t)(\theta_p - \theta(t)\right)\delta_t\ , & 0 \leq t < t_p\ ; \\ -mr^2\dot{\theta}\delta_{t_p}\ , & t = t_p\ . \end{cases} \qquad (7)$$

"Бегущий" импульс из правой части этого равенства как обобщенная функция смысла не имеет. Выход из этого положения заключается в сужении оператора (7) на последовательность моментов: $0, t^1, \ldots, t^k = t_p\ (t^m < t^{m+1})$. Очередной корректирующий импульс осуществляет сброс фазового вектора объекта (I) на линию, описываемую уравнением $(t_p - t^m)\dot{\theta} + \theta = \theta_p$.
С увеличением частоты коррекции управляемый процесс будет стремиться к предельному режиму, задаваемому уравнением $(t_p - t)\dot{\theta} + \theta = \theta_p$. Ясно, что для предельного режима $\ddot{\theta} = 0$, т.е.

$\omega = const = \omega_{opt}$. В итоге оказалось, что предельный режим не зависит от возмущающего момента, т.е. позиционное импульсное управление (7) компенсирует неизвестное возмущение (см. рис. 2).

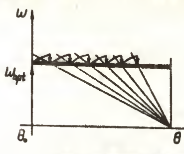


Рис. 2. Отработка внешнего возмущения

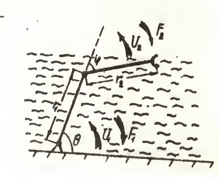
2. На рис. 3 изображен математический двухзвенный манипулятор. Как и выше предполагается, что связи не обладают массой. Движение происходит в среде, в которой силы сопротивления пропорциональны скоростям перемещения масс m_1 , m_2 . Моменты U_i , F_i , приложенные к звеньям, считаются соответственно управляющими и возмущающими. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\alpha_{11}\ddot{\theta} + \alpha_{12}\ddot{\varphi} - 2\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} - \beta\dot{\varphi}^2 + (m_1+m_2)gr_1\cos\theta + \tag{8}$$

$$+ m_2 g r_2 \cos(\theta+\varphi) = W_1 + W_2 + Q_1^c - F_1 - F_2 ;$$

$$\alpha_{12}\ddot{\theta} + \alpha_{22}\ddot{\varphi} + \beta\dot{\theta}^2 + m_2 g r_2 \cos(\theta+\varphi) = W_2 + Q_2^c - F_2 .$$

Рис. 3. Двухзвенный манипулятор



Здесь приняты обозначения:

$$\alpha_{11} = (m_1 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2 m_2 r_1 r_2 \cos\varphi \ ;$$

$$\alpha_{12} = m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 \cos\varphi \ , \quad \alpha_{22} = m_2 r_2^2 \ ;$$

$$\beta = m_2 r_1 r_2 \sin\varphi \ ;$$

$$Q_1^c = -b_1 \dot\theta \ , \quad b_1 = (a_1 + a_2) r_1^2 + a_2 (r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi) \ ;$$

$$Q_2^c = -b_2 \dot\varphi \ , \quad b_2 = a_2 r_2^2 \ ,$$

где Q_i^c - обобщенные силы сопротивления среды. Выпишем выражение для мощности:

$$\dot A = (U_1 + U_2)\dot\theta + U_2 \dot\varphi \ . \tag{9}$$

Задача 2. Найти закон перемещения звеньев манипулятора из положения $\theta(0) = \theta_0$, $\dot\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot\varphi(0) = 0$ в положение $\theta(t_p) = \theta_p$, $\dot\theta(t_p) = 0$, $\varphi(t_p) = \varphi_p$, $\dot\varphi(t_p) = 0$ с наименьшей затратой работы $A(t_p)$.

Как и в п.I, здесь можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих динамические связи. Принимая обозначения

$$\dot\theta = \omega_1 \ , \quad \dot\varphi = \omega_2 \ , \tag{IO}$$

можно разрешить уравнения (8) относительно управляющих моментов и, подставляя найденные выражения в формулу для мощности, получить уравнение

$$\dot A = b_1 \omega_1^2 + b_2 \omega_2^2 - \beta(\omega_1 + \omega_2)\omega_1 \omega_2 + (m_1 + m_2) g r_1 \omega_1 \cos\theta +$$
$$+ m_2 g r_2 (\omega_1 + \omega_2) \cos(\theta + \varphi) + (\alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_2)\dot\omega_1 + \tag{II}$$
$$+ (\alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{22}\omega_2)\dot\omega_2 \ .$$

Теперь роль управлений будут играть угловые скорости ω_1 , ω_2 а дифференциальные связи будут описываться уравнениями (IO), (II).

В выражения (II) входят произведения $\omega_i \dot{\omega}_j$, которым надо придать смысл в случае импульсных управляющих моментов. Это достигается с помощью следующего приема. Для гладких программ $\omega_i(\cdot)$ верно равенство

$$(\alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_2)D\omega_1 + (\alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{22}\omega_2)D\omega_2 = D\Psi - \Psi_t\ , \qquad (I2)$$

где

$$\Psi = y + 1/2\alpha_{11}\omega_1^2 + \alpha_{12}\omega_1\omega_2 + 1/2\alpha_{22}\omega_2^2\ . \qquad (I3)$$

Правая часть соотношения (I2) имеет смысл и для негладких функций $\omega_i(\cdot)$ и, следовательно, может служить определением левой части в негладкой ситуации.

Если искать выражение для работы в виде (I3), то относительно величины y получится уравнение

$$\dot{y} = B_1\omega_1^2 + B_2\omega_2^2 + (m_1+m_2)gr_1\omega_1\cos\theta + \qquad (I4)$$

$$+ m_2 g r_2(\omega_1+\omega_2)\cos(\theta+\varphi)\ , \qquad y(0) = 0.$$

Поскольку $\omega_i(t_p) = 0$, то обсуждаемая задача сводится к задаче минимизации величины $y(t_p)$ при ограничениях (I0), (I4). Такую задачу уже можно решать с помощью классического вариационного исчисления и получить следующий результат. В течение оптимального процесса обобщенные силы сопротивления таковы, что

$$Q_1^c = const\ ,\quad B_1^{-1}B_2(Q_1^c)^2 + (Q_2^c)^2 = const\ . \qquad (I5)$$

Тождественные соотношения (I5) позволяют сформулировать двухточечную краевую задачу

$$\dot{\theta} = \omega_1\ ,\ B_1(\varphi)\omega_1 = C_1\ ,\ \theta(t_0) = \theta_0\ ,\ \theta(t_p) = \theta_p\ ; \qquad (I6)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_2\ ,\ B_2\omega_2^2 + \frac{C_1^2}{B_1(\varphi)} = C_2\ ,\ \varphi(t_0) = \varphi_0\ ,\ \varphi(t_p) = \varphi_p\ ,$$

которую надо решить подбором констант C_i. Получающиеся при этом программы $\theta(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ – оптимальное решения исходной задачи, сформулированной в момент t_0.

Пусть задача (I6) решена для любого момента $t_0\ (0 \le t_0 < t_p)$ и любого набора $\{\theta(t_0),\ \varphi(t_0)\}$ из рабочего пространства ма-

нипулятора. Тогда, действуя по схеме из п.I, можно построить позиционную импульсную процедуру, реализующую в виде импульсно-скользящего режима перемещение манипулятора из исходного положения в заданное. В отсутствии возмущения эта процедура обеспечивает оптимальность перехода по энергетическим затратам.

Создано программное приложение к задаче, состоящее из двух модулей. Первый модуль РОБОТ производит следующие операции.

I. Построение квазиоптимальной программы движения с вычислением констант C_1, C_2.

2. Расчет совокупной величины работ, совершаемых при переориентации по построенной программе всеми внутренними и внешними силами системы.

3. Расчет совокупной величины работ, совершаемых всеми силами при поочередных переориентациях звеньев, осуществляемых по оптимальным программам (делается это для демонстрации относительной эффективности построенной программы движения).

Текст модуля написан на языке $FOREX$ ОС ДИСПАК. Входными параметрами модуля РОБОТ являются:

I) m_1, m_2 - массы первого и второго звеньев, соответственно;

2) r_1, r_2 - длины первого и второго звеньев, соответ-

3) θ_0, φ_0 - исходные обобщенные координаты системы;

4) θ_p, φ_p - конечные целевые обобщенные координаты системы;

5) $time$ - располагаемое время движения;

6) a_1, a_2 - коэффициенты сопротивления среды перемещению первого и второго звеньев, соответственно.

Выходные параметры модуля РОБОТ включают:

I) C_1, C_2 - константы, определяющие программу движения;

2) совокупные работы всех сил при поочередном перемещении ($ЭН1$) и при совместном перемещении ($ЭН1$) звеньев по оптимальным программам.

Второй модуль СИНТЕЗ производит синтез алгоритма импульсного позиционного управления движением двухзвенного манипулятора как при движении без внешних возмущений, так и при возмущениях (синусоидального, либо импульсного характера). Текст модуля написан на языке $FOREX$.

Входными параметрами модуля СИНТЕЗ являются: входные параметры модуля РОБОТ, дополненные параметром РЕЖИМ, определяющим наличие или отсутствие (0) внешних возмущений.

Выходными параметрами модуля СИНТЕЗ являются:

I) фактические координаты системы в начальный и конечный моменты движения – $\theta_0, \varphi_0, \theta_p, \varphi_p$;

2) *time* – фактическое время движения системы;

3) ЭН – совокупный энергетический расход.

Данные теста

m_1 = 30,00, кг		m_2 = 1000, кг	
r_1 = I50, м		r_2 = I00, м	
θ_0 = 3000, град		φ_0 =-6000, град	
θ_p = I5000 град		φ_p = 7000 град	
time = 300, с			

РЕЖИМ = I (без возмущений)

a_1 = I00 a_2 = I00

Выход (РОБОТ)

C_1 = 0.I5 C_2 = 4.35

ЭН2 =-I.23 ЭН1 = I0.25

Выход (СИНТЕЗ)

θ_0 = 30.00, град φ_0 = - 60.00, град

θ_p =I50.02, град φ_p = 70.00, град

time = 2.98 , с

ЭН = 2.2I

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Фролов К.В. О перспективах развития механики машин // Пятый всесоюз. съезд по теорет. и прикл.механ. Алма-Ата, I98I. С.346.

2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация движений манипуляционных роботов // Шестой всесоюз. съезд по теоретич. и прикл.механ. Ташкент, I986. С.25.

3. Лизунов А.Б., Осипов С.Н., Формальский А.М. Математические методы управляемых манипуляционных систем с очувствлением // Шестой всесоюз. съезд по теоретич. и прикл. механ. Ташкент, 1986. С.419.

4. Красовский Н.Н. Теория оптимальных управляемых систем. Механика в СССР за 50 лет: М. В 4 т. Т.I, Общая и прикладная механика. 1968. С.179–244.

5. Завалищин С.Т., Суханов В.И. Прикладные задачи синтеза и проектирования управляющих алгоритмов. М., 1984. 144 с.

6. Шилов Г.Е. Математический анализ: 2-й спецкурс. М., 1965. 328 с.

7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 1979. 432 с.

УДК 517.938

Ю.И.Бердышев (Институт математики и механики УрО АН СССР)

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ В ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА ГРУППЫ ТОЧЕК

Исследуется задача оптимального по быстродействию управления нелинейной системой с целью сближения ее в указанном порядке с заданной группой точек. Получены необходимые условия оптимальности управления и моментов сближения в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина [I], не использующие декомпозицию во времени.

Пусть движение системы в n -мерном евклидовом пространстве R^n описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in P \qquad (I)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Здесь $P \subset R^r$ – компакт (r – размерность пространства управлений), функция $f : [t_0, \infty[\times R^n \times P \to R^n$ непрерывна по совокупности аргументов вместе со своей частной производной по x. В пространстве "геометрических координат" R^k задана совокупность точек

$$\{w^{(i)} \in R^{\kappa},\ i \in \overline{1,m}\},\qquad (2)$$

где κ, m – натуральные числа, $\kappa \leq n$. Обозначим через π оператор проектирования R^n в R^{κ}. В качестве допустимых управлений выберем $\mathcal{U}$ – множество всех измеримых по Борелю функций $U:[t_0,\infty[\to P$. Каждому управлению-программе $U \in \mathcal{U}$ соответствует $\varphi_U \triangleq (\varphi_U(t),\ t \geq t_0)$ – движение системы (I), порожденное этим управлением из начальной позиции (t_0, x_0), $\triangleq$ – равно по определению.

Будем говорить, что управление $U \in \mathcal{U}$ обеспечивает сближение системы (I) с совокупностью точек (2) за время $\vartheta - t_0$ в заданном порядке $W \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$, если найдутся такие моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_m$, удовлетворяющие условиям $\tau_1 < \dots < \tau_m$, $\tau_m = \vartheta$, при которых имеют место соотношения

$$\|\pi(\varphi_U(\tau_i)) - w^{(i)}\|_{\kappa} = 0,\ \ (i \in \overline{1,m}),\qquad (3)$$

где $\|\cdot\|_{\kappa}$ – евклидова норма в R^{κ}.

Задача I. Определить управление $U^0 \in \mathcal{U}$, обеспечивающее сближение системы (I) с совокупностью точек (2) за наименьшее время $\vartheta^0 - t_0$.

Пусть

$$T \triangleq \{\tau : \tau \in R^{m+1},\ \tau_0 = t_0,\ \tau_{j-1} < \tau_j\ (j \in \overline{1,m})\};$$

$$T_{\vartheta} \triangleq \{\tau : \tau \in T,\ \tau_m = \vartheta\};$$

$$S_m \triangleq \{\alpha : \alpha \in R^m,\ \alpha_i \geq 0 (i \in \overline{1,m}),\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Задача 2. При фиксированном моменте $\tau_m = \vartheta$, гладких функциях $\sigma_i : R^n \to R\ (i \in \overline{1,m})$ определить пару $(\tau^{\alpha}, U^{\alpha}) \in T_{\vartheta} \times \mathcal{U}$, доставляющую минимум функционалу

$$\gamma_{\vartheta}(\alpha, \tau, U) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_i(\varphi_U(\tau_i))\ \ (\alpha \in S_m).\qquad (4)$$

Будем предполагать выполненными условия неограниченной продолжимости решений системы (I)

$$\|f(t,x,u)\|_n \leq C(1+\|x\|_n), \; C - const,$$

а также выпуклость в R^{n+1} множества обобщенных скоростей

$$V(t,x) = \{f(t,x,u), \; u \in P\}$$

при любых фиксированных (t,x). Эти условия гарантируют ([2], с.284) существование оптимального управления U^0 в задаче I.

Введем обозначения: $w_\alpha(t) = \varphi_{U^\alpha}(t)$ – движение, порожденное управлением U^α; $S_\alpha(t,t_0), t_0 \leq t \leq \vartheta$ – фундаментальная матрица решений системы:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}\Big|_{\substack{u=U^\alpha(t)\\ x=w_\alpha(t)}} \delta x \tag{5}$$

$$L \triangleq \{\ell : \ell \in R^m, \; \|\ell\|_K \leq 1\},$$

$$\ell_i^\alpha = (\partial\theta_i(x)/\partial x)\Big|_{x=w_\alpha(\tau_i^\alpha)}.$$

Положим

$$\begin{aligned} &\forall i \in \overline{1,m}, \; \xi \in [t_0, \tau_i]; \\ &\psi_\alpha^{(i)}(\xi) = \ell_i^{\alpha'} S_\alpha(\tau_i, \xi); \\ &\overline{\psi}_\alpha^{(i)}(\xi) = \sum_{j=i}^{m} \alpha_j \psi_\alpha^{(j)}(\xi). \end{aligned} \tag{6}$$

("штрих" означает транспонирование).

Справедливо [3, 4] следующее утверждение:

<u>Теорема I</u>. Пусть пара $(\tau^\alpha, U^\alpha) \in T_\vartheta \times U$ является решением задачи 2. Тогда для каждого $i \in \overline{1,m}$ почти всюду на отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ имеет место соотношение:

$$\overline{\psi}_\alpha^{(i)'}(t) f(t, w_\alpha(t), U^\alpha(t)) = \min_{u \in P} \overline{\psi}_\alpha^{(i)'}(t) f(t, w_\alpha(t), u), \tag{7}$$

а в точках $\tau_i^\alpha \; (i \in \overline{1,m-1})$ выполнены условия

$$\begin{aligned} &\min_{u \in P} \overline{\psi}^{(i)'}(\tau_i^\alpha) f(\tau_i^\alpha, w_\alpha(\tau_i^\alpha), u) = \\ &\qquad = \min_{u \in P} \overline{\psi}^{(i+1)'}(\tau_i^\alpha) f(\tau_i^\alpha, w_\alpha(\tau_i^\alpha), u). \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что эту теорему можно использовать при функциях $\sigma_i : R^n \to R,\ i \in \overline{1,m}$, определяемых формулами

$$\sigma_i(x) \triangleq \| \pi(x) - w^{(i)} \|_K \qquad (9)$$

лишь тогда, когда

$$\forall i \in \overline{1,m} : \sigma_i(w_\alpha(\tau_i^\alpha)) \neq 0. \qquad (10)$$

Это связано с необходимостью вычисления производных $\partial \sigma_i / \partial x_j$ $(i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,K})$ в точках $x^{(i)} = w_\alpha(\tau_i^\alpha)$. В дальнейшем мы укажем один из способов выбора вектора α в выражении (3), при котором теорема I применима и в случае, когда функции $\sigma_i\ (i \in \overline{1,m})$ определяются формулой (9).

Теперь при заданном моменте ϑ рассмотрим две следующие задачи:

$$\min_{(\tau,U) \in T_\vartheta \times \mathcal{U}} \gamma_\vartheta(\alpha, \tau, U) \to \max,\ \alpha \in S_m; \qquad (11)$$

$$\max_{\alpha \in S_m} \gamma_\vartheta(\alpha, \tau, U) \to \min,\ (\tau, U) \in T_\vartheta \times \mathcal{U}. \qquad (12)$$

Последняя из них тесно связана с задачей оптимального быстродействия (задачей I). Действительно, в силу тождества

$$\max_{i \in \overline{1,m}} \sigma_i(\psi_U(\tau_i)) = \max_{\alpha \in S_m} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_i(\psi_U(\tau_i))$$
$$((\tau, U) \in T_\vartheta \times \mathcal{U}) \qquad (13)$$

решение задачи I может быть получено как предел решения задачи (12) при стремлении момента ϑ слева к наименьшему моменту времени ϑ_σ, при котором значение задачи (12) равно нулю. Таким образом, время $\vartheta_\sigma - t_0$ равно времени оптимального быстродействия $\vartheta^0 - t_0$ в задаче I.

Можно показать, что вектор α^0, являющийся решением задачи (11), обладает следующим свойством. Если (τ^α, U^α) – решение задачи 2 при $\alpha = \alpha^0$ и

$$M_0 \triangleq \{k : k \in \overline{1,m},\ \sigma_k(\psi_{U^{\alpha^0}}(\tau_k^{\alpha^0})) - \max_{i \in \overline{1,m}} \sigma_i(\psi_{U^{\alpha^0}}(\tau_i^{\alpha^0}))\}, \qquad (14)$$

то $\forall j \in \overline{1,m} / M_0 : \alpha_j^0 = 0$. Использование вектора α^0 позволяет исключить из рассмотрения те точки $w^{(i)}$, для которых $\alpha_i^0 = 0$. Это дает возможность при решении задачи 2 и $\alpha = \alpha^0$ применять теорему 2 в случае, когда функции $\sigma_i : R^n \to R (i \in \overline{1,m})$ определяются формулой (9), предварительно положив $m = \rho$ (ρ – число элементов множества M_0) и перенумеровав точки $w^{(i)}, i \in M_0$. Иначе говоря, при решении задачи (II) можно использовать теорему 2. При этом точки $w^{(i)}, i \in \overline{1,m}/M_0$ исключаются из рассмотрения, а сближение с ними происходит "попутно" при решении задачи о сближении с точками $w^{(i)}, i \in M_0$.

Из теории игр известно, что оптимумы задач (II), (I2) – величины γ_ϑ^0, σ_ϑ^0 , определяемые формулами

$$\gamma_\vartheta^0 \triangleq \max_{\alpha \in S_m} \min_{(\tau, U) \in T_\vartheta \times \mathcal{U}} \gamma_\vartheta(\alpha, \tau, U);$$

$$\sigma_\vartheta^0 \triangleq \min_{(\tau, U) \in T_\vartheta \times \mathcal{U}} \max_{\alpha \in S_m} \gamma_\vartheta(\alpha, \tau, U),$$

удовлетворяют неравенству

$$\sigma_\vartheta^0 \geq \gamma_\vartheta^0. \qquad (15)$$

Очевидно, для достаточно малого $\vartheta (\vartheta \geq t_0)$ значения $\sigma_\vartheta^0, \gamma_\vartheta^0$ положительны. Пусть ϑ_σ, ϑ_γ – наименьшие моменты времени, в которые зануляются соответственно величины σ_ϑ^0, γ_ϑ^0 . Ранее отмечалось, что $\vartheta_\sigma = \vartheta^0 (\vartheta^0 - t_0$ – время быстродействия в задаче I). Теперь покажем, что $\vartheta^0 = \vartheta_\gamma$. Это равенство позволяет искать ϑ^0 как наименьший момент времени ϑ , при котором величина γ_ϑ^0 обращается в нуль. Вначале заметим, что соотношение

$$\vartheta_\sigma \geq \vartheta_\gamma \qquad (16)$$

вытекает непосредственно из неравенства (I5). При $\vartheta = \vartheta_\gamma$ найдется такой вектор $\alpha^0 \in S_m$ и соответствующая ему пара $(\tau^{\alpha^0}, U^{\alpha^0})$ – решение задачи 2 при $\alpha = \alpha^0$:

$$\forall i \in \overline{1,m} : \sigma_i (\psi_{U^{\alpha^0}} (t_i^{\alpha^0})) = 0. \qquad (17)$$

Это связано с тем, что лишь при условиях (17) величина

$$\gamma_{\vartheta_\gamma} \triangleq \max_{i \in \overline{1,m}} \sigma_i (\psi_{U^{\alpha^0}} (t_i^{\alpha^0}))$$

обращается в нуль (как того требует выбор момента ϑ_γ). Из (17) вытекает неравенство $\vartheta^0 \leq \vartheta_\gamma$. Отсюда с учетом (16) имеем $\vartheta^0 = \vartheta_\gamma$.

Итак, каждому моменту ϑ , меньшему ϑ_γ , соответствует определенный вектор α^0 и разбиение множества $\overline{1,m}$ на части M_0 (14), $\overline{1,m}/M_0$, при которых

$$\forall i \in M_0 : \sigma_i (\psi_{U^{\alpha^0}} (t_i^{\alpha^0})) \neq 0, \qquad (18)$$

поэтому следующие определения векторов $\ell_i (\vartheta)$, которые могут быть использованы в формулировке теоремы 2 в качестве векторов ℓ_i^{α} , являются корректными. Эти соотношения позволяют при определении оптимального управления U^{α^0} в задаче 2 с функциями $\sigma_i (i \in \overline{1,m})$ вида (9) и моментом окончания ϑ , меньшим ϑ_γ , использовать теорему 1. Всякой последовательности $(\vartheta_s , s = 1, 2, \dots)$ моментов окончания, сходящейся слева к ϑ_γ отвечает последовательность управлений $(U_s^0 , s = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности (7), (8). Поскольку $\vartheta_\gamma = \vartheta^0 (\vartheta^0 - t_0$ – время быстродействия в задаче 1), то при достаточно большом номере s управление U_s^0 обеспечивает попадание системы (1) в моменты времени $t_i^{\alpha} (i \in \overline{1,m})$ в сколь угодно малые ε -окрестности точек $w^{(i)}$ (2). Поэтому оптимальное по быстродействию управление U^0 можно определять как предел (в смысле * - слабой сходимости) последовательности $(U_s^0 , s = 1, 2, \dots)$ при $\vartheta \to \vartheta^0$ управлений, каждое из которых удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в задаче 2. В случае, когда система (1) линейна по u , предельное управление выписывается в явном виде. В силу выбора функций $\sigma_i (i \in \overline{1,m})$ (9) их градиент в точках $w_\alpha (t_i^{\alpha})$ при условиях (10) имеет длину, равную единице. Поэтому определение функций (6) при

любом $\vartheta < \vartheta_r$ является содержательным, а соотношения, фигурирующие в теореме I, невырожденными. Обозначим через $\ell_i^0 \ (i \in \overline{1,m})$ предел ℓ_i^α (5) при $\vartheta \to \vartheta^0$, а через $\psi_0^{(i)}(t)$ – ему соответствующую функцию $\psi_\alpha^{(i)}(t)$. Положим

$$\bar{\psi}_0^{(i)}(t) = \sum_{j=i}^{m} \alpha_j \psi_0^{(j)}(t).$$

Теорема 2. Пусть $U^0 \in \mathcal{U}$ – оптимальное управление в задаче I, $\tau_1^0, \ldots, \tau_m^0$ – соответствующие моменты сближения системы (I) с совокупностью точек (2), $w(t) = \varphi_{U^0}(t)$. Тогда для каждого $i \in \overline{1,m}$ почти всюду на отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ имеет место соотношение

$$\bar{\psi}_0^{(i)\prime}(t) f\left(t, w(t), U^0(t)\right) = \min_{u \in P} \bar{\psi}^{(i)\prime}(t) f(t, w(t), u),$$

а также $\forall l \in \overline{1, m-1}$

$$\min_{u \in P} \bar{\psi}_0^{(i)\prime}(\tau_i^0) f(\tau_i^0, w(\tau_i^0), u) = \min_{u \in P} \bar{\psi}_0^{(i+1)\prime}(\tau_i^0, w(\tau_i^0), u).$$

Пример. Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию сближении управляемого объекта, описываемого нелинейной системой

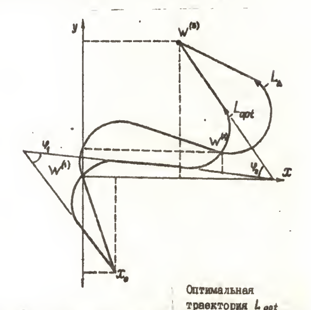
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\varphi, \\ \dot{y} &= \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= Ku, \quad |u| \le 1, \quad K = const \end{aligned} \tag{I9}$$

с заданной системой точек $\{w^{(i)} \in R^2, i \in \overline{1,m}\}$. Система (I9) является простейшей моделью летательного аппарата, имеющего аэродинамические рули и движущегося в горизонтальной плоскости. В рассматриваемом случае:

$$S(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\varphi(t) - \cos\varphi(t_0) \\ 0 & 1 & \sin\varphi(t) - \sin\varphi(t_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_0^{(i)}(t) \triangleq \ell_i^{0'} S(\tau_i, t) = (\ell_{i1}^0, \ell_{i2}^0; \\ \ell_{i1}^0 (\cos\varphi(t) - \cos\varphi(t_0)) + \ell_{i2}^0 (\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t_0))'; \tag{20}$$

$$U^0(t) = \operatorname{sign}\Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^0 (\ell_{j1}^0 (\cos\varphi(t) - \cos\varphi(t_0)) + \\ + \Lambda_{j2} (\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t_0))\Big], \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_m].$$



Оптимальная траектория L_{opt}

Можно показать, что из теоремы 2 следует справедливость соотношения

$$\ell_{i1}^0 \cos\varphi(\tau_i^0) + \ell_{i2}^0 \sin\varphi(\tau_i^0) = 0 \quad (i \in \overline{1,m}) \tag{21}$$

на оптимальной траектории. Из [5] вытекает, что на отрезке $[\tau_{m-1}^0, \tau_m^0]$ оптимальная траектория состоит из дуги окружности и отрезка прямой. При этом величина $\Psi_0^{(m)}(t)$ должна быть положительной при любом $\varphi(\tau) \in]\varphi(\tau_m) - 2\pi, \varphi(\tau_m)[$.

Отсюда имеем

$$\Lambda_{m1} = -\cos\varphi(\tau_m), \quad \Lambda_{m2} = -\sin\varphi(\tau_m). \qquad (22)$$

Можно показать, что координаты α_i^0, $i \in \overline{1,m}$ вектора α^0 – решения задачи (II) в рассматриваемом случае удовлетворяют соотношениям (см. рисунок)

$$2\alpha_m^0 \cos\frac{\varphi_i}{2} = \alpha_i^0 \quad (i \in \overline{1,m-1}). \qquad (23)$$

Кроме того, по аналогии с [5] можно показать, что оптимальная траектория состоит из дуг окружностей радиуса $R = \frac{1}{N}$ и отрезков прямых, их соединяющих. Ввиду (2I) выбор вектора ℓ_i^0 полностью определяет дугу окружности, проходящей через точку $w^{(i)}$. Заметим также, что в точках сопряжения дуги и отрезка соответствующие выражения, стоящие в квадратных скобках в (20), обращаются в нуль. Эти замечания и соотношения (2I)-(23) используются при построении итерационного метода вычисления векторов α^0, ℓ_i^0, $i \in \overline{1,m}$, определяющих оптимальное управление (20).

На рисунке изображена оптимальная траектория L_{opt}, полученная с использованием указанного метода при следующих начальных условиях:

$x_0 = 15$, $x_1 = 0$, $x_2 = 60$, $x_3 = 40$,

$y_0 = -40$, $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 55$,

где x_i, y_i – координаты точки $w^{(i)}$, $i \in \overline{1,3}$. Сравним траекторию L_{opt} и траекторию L_Δ, полученную в результате декомпозиции задачи с m целевыми множествами на m двухточечных задач. Из рисунка видно, что время движения по траектории L_Δ существенно больше времени движения по оптимальной траектории.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. М., 1969. 384 с.

2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., 1972. 574 с.

3. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. О некоторых задачах последовательной оптимизации управляемых систем / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1983. Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 109-83. 98 с.

4. Бердышев Ю.И. Об одной задаче последовательной оптимизации без декомпозиции во времени // Кибернетика, 1987, № 4. С.33-47.

5. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл.матем.и механ. 1975. Т.39, вып.6. С.965-994.

УДК 517.938

В.П.Серов, А.Г.Ченцов (Уральский политехнический институт)

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ И КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

1. Введение. Рассматривается линейная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)b(t), \qquad (1.1)$$

где $x(t) \in X \triangleq R^n$; матрица-функция $A(\cdot)$, определенная на R , непрерывна по t ; управление $u(\cdot) : T \to R$ кусочно-постоянно и непрерывно справа ($T \triangleq [t_0, \vartheta_0[$, где $t_0 < \vartheta_0$; R - числовая прямая). Управление $u(\cdot)$ стеснено ограничением

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} |u(t)| dt \leq c, \quad c \geq 0. \qquad (1.2)$$

Вектор-функция $b(\cdot) : T \to X$ не предполагается непрерывной (конкретные условия, которым должна удовлетворять $b(\cdot)$, будут сформулированы ниже).

Полагая $I \triangleq [t_0, \vartheta_0] = T \cup \{\vartheta_0\}$, рассмотрим множество X^I всевозможных функций $f : I \to X$, наделенное топологией поточечной сходимости [1, 2] . Будем рассматривать траектории системы (1.1) с заданным начальным условием (н.у.) $x(t_0) = x_0$ как элементы X^I . Получающийся в результате пучок "обычных" решений не является, однако, компактным множеством; управления $u(\cdot)$, удовлетворяющие (1.2), также

не образуют компакта в смысле какой-либо естественной топологии. Более того, отображения вида

$$t \mapsto u(t)\delta(t) : T \to X$$

имеют "в пределе" смысл своеобразного произведения обобщенной функции [3] на разрывную, а это предоставляет определенные затруднения при использовании аппарата обобщенных функций для построения расширений. В связи с этим в данной работе будет использован другой аппарат, а именно, аппарат конечно-аддитивных мер (КАМ) [4, гл.III, IУ], что позволяет решить проблему существования оптимального управления в целом ряде экстремальных задач.

Отметим, что исследования в области задач импульсного управления линейными системами, базирующиеся на принципе двойственности, восходят к фундаментальным результатам Н.Н.Красовского, связанным с проблемой моментов [5, 6]. Развитие подхода [5] получено в работе [7]; см.также [8, 9]. Методы расширения для задач оптимального управления и вариационного исчисления подробно изложены в [10-12]. Идеология рассматриваемых ниже конструкций расширения связана также с постановками [13 - 14].

2. Конечно-аддитивные меры. Если H -множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначим семейство всех подмножеств H. Пусть

$$2^H \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\phi\};\ \mathcal{N} \triangleq \{1;2;\dots\};\ \forall k \in \mathcal{N}:$$

$$: \overline{1,k} \triangleq \{j : j \in \mathcal{N},\ j \leq k\}.$$

Через $\mathcal{T}$ обозначим семейство всех полуинтервалов $[c,d[$ таких, что $c \in T$, $d \in I$. Тогда $(T, \mathcal{T})$ - измеримое пространство с полуалгеброй [15, с.46] множеств. Множество всех положительных КАМ $\mu : \mathcal{T} \to R$ обозначим через $(add)_+[\mathcal{T}]$, следуя [13, 16]. Пусть $\ell \in (add)_+[\mathcal{T}]$ - длина [13, с.35] как функция множеств, а именно : $\forall c \in T,\ d \in [c, \vartheta_0]$ $\ell([c,d[) \triangleq d-c$. Через $B_0(T, \mathcal{T})$ обозначим множество всех ступенчатых отображений $(T,\mathcal{T})$ в R. Пусть, как и в [4, 13, 16], $B(T,\mathcal{T})$ есть замыкание $B_0(T,\mathcal{T})$ в смысле метрики равномерной сходимости. Пространство $B(T,\mathcal{T})$ с традиционной sup -нормой [4, с.261] является банаховым;

пространство, топологически сопряженное к $B(T,\mathcal{F})$, обозначим через $B^*(T,\mathcal{F})$. В обычном смысле [4, гл.V] понимаем термин $*$-слабая топология $B^*(T,\mathcal{F})$: топология в $B^*(T,\mathcal{F})$, порожденная элементами $B(T,\mathcal{F})$. Пусть теперь $\mathbb{A}(\mathcal{F})$ - множество всех мер $\mu - \nu$, когда μ и ν пробегают $(add)_+[\mathcal{F}]$. Наделяя линейное пространство $\mathbb{A}(\mathcal{F})$ (КАМ ограниченной вариации) естественной нормой-вариацией v_μ, мы получаем банахово пространство, изометрически изоморфное $B^*(T,\mathcal{F})$. Соответствующий изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{F})$ на $B^*(T,\mathcal{F})$ определяется как отображение, переводящее $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{F})$ в функционал

$$g \mapsto \int_T g(t)\mu(dt) : B(T,\mathcal{F}) \to R\,; \qquad (2.1)$$

интеграл понимается в смысле [16, с.75]. С учетом изометрической изоморфности $\mathbb{A}(\mathcal{F})$ и $B^*(T,\mathcal{F})$ наделим само $\mathbb{A}(\mathcal{F})^*_-$ слабой топологией $\tau_*(\mathcal{F})$, вкладывая в это понятие смысл $*$-слабой топологии $B^*(T,\mathcal{F})$. Полагаем далее

$$S \triangleq \{\mu : \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{F}),\ v_\mu \leq C\}\,; \qquad (2.2)$$

$$\Pi_a \triangleq \{\mu : \mu \in (add)_+[\mathcal{F}],\ \mu(T) \leq a\}\ (a > 0). \qquad (2.3)$$

Наряду с (2.1) рассмотрим неопределенный интеграл [16, с.76]. Именно, $\forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{F}),\ f \in B(T,\mathcal{F})$ через $f * \mu$ обозначим меру из $\mathbb{A}(\mathcal{F})$, сопоставляющую каждому множеству $L \in \mathcal{F}$ μ-интеграл f на множестве L. Пусть $\forall a \in [0,\infty[$

$$M_a \triangleq \{f : f \in B_0^+(T,\mathcal{F}),\ \int_T f(t)\mu(dt) \leq a\}, \qquad (2.4)$$

где $B_0^+(T,\mathcal{F})$ - положительный конус $B_0(T,\mathcal{F})$ в смысле поточечной упорядоченности. Между множествами (2.3) и (2.4) существует тесная связь [17], сводящаяся к возможности аппроксимации мер из (2.3) неопределенными интегралами элементов (2.4). Здесь мы учитываем, что $\ell(\Gamma) \neq 0$ при $\Gamma \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Поэтому каждая мера из (2.3) является ℓ-непрерывной в смысле [17].

Если (H,τ) - топологическое пространство и $\Lambda \in \mathcal{P}(H)$, полагаем, что $cl(\Lambda,\tau)$ - замыкание Λ в (H,τ). Тогда [17] $\forall a \in [0,\infty[$.

$$\Pi_a = cl(\{f * \mu : f \in M_a\}, \tau_*(\mathcal{J})). \qquad (2.5)$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех $U \in B_0(T, \mathcal{J})$ таких, что

$$\int_T |U(t)| \ell(dt) \leq c.$$

Легко видеть [I3, гл.I], что $\mathcal{U}$ – множество всех ступенчатых отображений $(T, \mathcal{J})$ в R, соблюдающих ограничение (I.2). Используя (2.5), можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.I. Множество S является $*$-слабым замыканием множества $\{U * \ell : U \in \mathcal{U}\}$:

$$S = cl(\{U * \ell : U \in \mathcal{U}\}, \tau_*(\mathcal{J})).$$

3. Обобщенная управляемая система. Рассмотрим систему (I.I). Будем предполагать, что $\forall i \in \overline{1, n}$ i – я компонента вектор-функции $b(\cdot)$ является элементом $B(T, \mathcal{J})$, т.е. $b_i \in B(T, \mathcal{J})$. В этих условиях $b_i(\cdot)$ являются ограниченными борелевскими функциями, поэтому система (I.I) имеет единственное решение (в смысле Каратеодори [I0, гл.II, п.4]) $\varphi_U = (\varphi_U(t) \in X, t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$ для $\forall U \in \mathcal{U}$, и это решение может быть записано посредством формулы Коши: для $\forall \theta \in I$

$$\varphi_U(\theta) = \Phi(\theta, t_0) x_0 + \int_{[t_0, \theta[} U(\xi) \Phi(\theta, \xi) b(\xi) \ell(d\xi). \qquad (3.1)$$

Здесь $\Phi(\cdot, \cdot)$ есть фундаментальная матрица-функция решений системы $\dot{x} = A(t)x$; интегралы в статье вычисляются покомпонентно. Подчеркнем, что в (3.I) мы можем вернуться к ℓ-интегрированию [I3, § 6], так как компоненты подынтегральных функций являются элементами $B(T, \mathcal{J})$; см. по этому поводу [4, с.I82]. Пусть $V_1 \triangleq \{\varphi_U : U \in \mathcal{U}\}$ – пучок обычных решений (3.I). Далее полагаем $\forall \mu \in S$, что $\hat{\varphi}_\mu \triangleq (\hat{\varphi}_\mu(t), t_0 \leq t \leq \vartheta_0) \in X^I$ есть отображение

$$\theta \mapsto \Phi(\theta, t_0) x_0 + \int_{[t_0, \theta[} \Phi(\theta, \xi) b(\xi) \mu(d\xi) : I \to X, \qquad (3.2)$$

где интеграл по КАМ понимается в соответствии с [I3, гл.II], [I6, с.76]. Пучки V_1 и $V_2 \triangleq \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in S\}$ рассматриваем как подмножества X^I с топологией $\hat{\tau}$ поточечной сходимости. Отметим, что $V_1 \subset V_2$, так как $\forall U \in \mathcal{U}$, $g \in B(T, \mathcal{T})$, $\Gamma \in \mathcal{T}$

$$\int_\Gamma g(t) U(t) \ell(dt) = \int_\Gamma g(t)(U * \ell)(dt),$$

где $U * \ell \in S$. Таким образом, "обычные" решения суть частный случай обобщенных. Из (3.2) и определения $\tau_*(\mathcal{T})$ следует

Лемма 3.I. Отображение $\mu \mapsto \tilde{\varphi}_\mu : S \to X^I$ непрерывно как отображение $(S, \tau_*^{(c)}(\mathcal{T}))$, $\tau_*^{(c)}(\mathcal{T}) = \{S \cap G : G \in \tau_*(\mathcal{T})\}$, в $(X^I, \hat{\tau})$.

Теорема 3.I. Множество V_2 и замыкание V_1 в $(X^I, \hat{\tau})$ совпадают.

4. Задачи оптимизации с фазовыми ограничениями. Пусть $\gamma : X^I \to R$ – функционал, непрерывный относительно $(X^I, \hat{\tau})$, и пусть задано отображение $t \mapsto N_t : I \to \mathcal{P}(X)$, для которого N_ξ замкнуто в X при $\xi \in I$. Обычная задача оптимизации имеет вид

$$\gamma(\varphi_U) \to \inf, \; U \in \mathcal{U}, \; \varphi_U(t) \in N_t \;\; (t \in I). \qquad (4.I)$$

Она, однако, может быть неустойчивой при изменении N, в связи с чем целесообразна асимптотическая постановка в надлежащем классе приближенных решений. Рассмотрим, следуя [I0, гл.III], обобщенную задачу

$$\gamma(\tilde{\varphi}_\mu) \to \min, \; \mu \in S, \; \tilde{\varphi}_\mu(t) \in N_t \;\; (t \in I). \qquad (4.2)$$

Теорема 4.I. Пусть ограничения задачи (4.2) совместны: множество

$$\Gamma \triangleq \{\mu : \mu \in S, (\forall t \in I : \tilde{\varphi}_\mu(t) \in N_t)\} \qquad (4.3)$$

непусто; тогда $\exists \mu_0 \in \Gamma \;\; \forall \mu \in \Gamma \; \gamma(\tilde{\varphi}_{\mu_0}) \leq \gamma(\tilde{\varphi}_\mu)$.

Рассмотрим теперь асимптотическую постановку задачи (4.I). Обозначим $\forall \varepsilon \in [0,\infty[,\ t \in I$ через $N_t^{(\varepsilon)}$ замкнутую евклидову ε -окрестность N_t, $N_t \subset X$. Пусть $Fin(I)$ есть семейство всех непустых конечных подмножеств I.

Условие 4.I. $\forall \varepsilon \in]0,\infty[,\ K \in Fin(I)$:

$$U_\varepsilon(K) \triangleq \{U : U \in \mathcal{U},\ (\forall t \in K : \varphi_U(t) \in N_t^{(\varepsilon)})\} \neq \phi .$$

Тогда семейство $\mathcal{U}$ всех множеств $U_\varepsilon(K)$, когда ε пробегает $]0,\infty[$ и K пробегает $Fin(I)$, есть базис фильтра $\mathcal{U}$. При этом [I4, § 7]

$$(\mathcal{U}-\underline{min})[\hat{\gamma}] \triangleq \sup_{E \in \mathcal{U}} \inf_{U \in E} \gamma(\varphi_U) = \tag{4.4}$$

$$= \sup_{(\varepsilon,K) \in]0,\infty[\times Fin(I)} \inf_{U \in U_\varepsilon(K)} \gamma(\varphi_U),$$

где $\hat{\gamma} \in R^{\mathcal{U}}$ имеет вид $\hat{\gamma}(U) \triangleq \gamma(\varphi_U)$, есть асимптотическое значение задачи (4.I), достижимое в классе (приближенных) решений-направленностей [I, I4, I7].

Теорема 4.2. Величина (4.4) является значением задачи (4.2):

$$(\mathcal{U}-\underline{min})[\hat{\gamma}] = \min_{\mu \in \Gamma} \gamma(\tilde{\vartheta}_\mu).$$

Решения μ_0 задачи (4.2) позволяют построить оптимальные приближенные решения-направленности путем аппроксимации μ_0 в $(\mathbb{A}(\mathcal{J}),\ \tau_*(\mathcal{J}))$.

5. Двойственность. Пусть $m \in \mathcal{N}$; $M_1, \ldots, M_m$ – непустые выпуклые компакты в R^r $(r \in \overline{1,n})$ с опорными функциями $\rho(\cdot|M_1), \ldots, \rho(\cdot|M_m)$ [I2, с.57] ; $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$, и пусть заданы моменты времени

$$\tau_0 = t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_m = \vartheta_0 .$$

Рассмотрим функционал

$$\gamma(x(\cdot)) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, d(\{x(\tau_i)\}_r,\ M_i),$$

где $d(\cdot, M_i)$ – функция евклидова расстояния от точки (из R^r) до множества M_i, а $\{y\}_r$ – вектор первых r координат вектора $y \in X$. Тогда

$$\gamma_0 \triangleq \inf_{V \in U} \gamma(\varphi_V) = \min_{\mu \in S} \gamma(\tilde{\varphi}_\mu) \tag{5.1}$$

есть значение задачи (4.2) в условиях, когда $N_i = X$. Пусть $\varrho \in S$ оптимально в (5.1): $\gamma(\tilde{\varphi}_\varrho) = \gamma_0$. Покажем, что ϱ удовлетворяет принципу максимума Л.С.Понтрягина. Пусть $\mathbb{L}$ –замкнутый единичный евклидов шар в R^r с центром в "нуле". Для любого $\Lambda \in \mathbb{L}$ положим

$$\Psi(\Lambda) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\Lambda'(i)\{\Phi(\tau_i, t_0)x_0\}_r - \rho(\Lambda(i)|M_i)\right) - \tag{5.2}$$

$$- c \max_{s \in \overline{1,m}} \sup_{t \in [\tau_{s-1}, \tau_s[} \left| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda'(i) \{\Phi(\tau_i, t) b(t)\}_r \right|.$$

Теорема 5.1. Пусть $\Lambda_0 \in \mathbb{L}$ – максимизирующий вектор в задаче $\Psi(\Lambda) \to \max$, $\Lambda \in \mathbb{L}$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{m} \int_{[\tau_{s-1}, \tau_s[} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda_0'(i) \{\Phi(\tau_i, t) b(t)\}_r \, \varrho(dt) =$$

$$= - c \max_{s \in \overline{1,m}} \sup_{t \in [\tau_{s-1}, \tau_s[} \left| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda_0'(i) \{\Phi(\tau_i, t) b(t)\}_r \right|.$$

В заключение отметим, что в данной работе рассмотрен для простоты случай скалярного управления; в [18] аналогичные результаты приведены для задач о векторным управлением в условиях, когда ограничена сумма полных импульсов координат управляющей функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келли Дж. Общая топология. М., 1981. 431 с.

2. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986. 751 с.

3. Шилов Г.Е. Математический анализ: Второй спецкурс. М., 1984. 207 с.

4. Данфорд Дж. Т., Шварц Н. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962. 895 с.

5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. 476 с.

6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М., 1970. 420 с.

7. Куржанский А.Б. Осипов Ю.С. Об оптимальном управлении при ограничениях на фазовые координаты системы // Оптимальные и адаптивные системы. М., 1972. С.124-133.

8. Сесекин А.Н. О непрерывной зависимости от правых частей и устойчивости аппроксимируемых решений дифференциальных уравнений, содержащих произведения разрывных функций на обобщенные // Дифференц.уравнения. 1986. Т.22, № 11. С.2009-2011.

9. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е. Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск, 1983. 112с.

10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и интегральными уравнениями. М., 1977. 624 с.

11. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974. 488 с.

12. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М., 1974. 480 с.

13. Ченцов А.Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск, 1985. 128 с.

14. Ченцов А.Г. Оптимизация в условиях нечетких ограничений. Свердловск, 1984 (препринт), 1986. 54 с.

15. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М., 1969. 310 с.

16. Ченцов А.Г. К вопросу об универсальной интегрируемости ограниченных функций // Матем.сборник. 1986. Т.131(173), № 1(9). С.73-93.

17. Ченцов А.Г. О некоторых представлениях положительных конечно-аддитивных мер, приближаемых неопределенными интегралами / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1987. Деп.в ВИНИТИ, 1987, № 8511-В87. 37 с.

18. Серов В.П., Ченцов А.Г. Конечно-аддитивное расширение линейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1989. Деп.в ВИНИТИ, 1989, № 6644-В89. 60 с.

УДК 517.977.5

А.Н.Сесекин (Институт математики и механики УрО АН СССР)

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ РЕСУРСОМ

Рассматривается задача минимизации негладкого интегрального функционала вдоль траекторий линейной системы при ограниченном ресурсе управления. Получено выражение для определения оптимального значения функционала качества. Найдены необходимые и достаточные условия для определения оптимального управления. Различные задачи оптимального управления рассматривались в [1-4]. Задачи минимизации, аналогичные изучаемым здесь, но при мгновенных ограничениях, исследовались в [5], а в дискретной постановке – в [6].

Пусть движение объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\dot{v}(t), \qquad (1)$$

где x – n-мерный фазовый вектор; v – m-мерное управление $(v \in U(\cdot/a))$; $A(t)$ и $B(t)$ – соответственно $n \times n$ и $n \times m$ матрицы-функции с непрерывными на $[t_0, \vartheta_0]$ элементами; $U(\cdot/a)$ – класс функций ограниченной вариации со значениями в R^m, удовлетворяющих неравенству:

$$\underset{[t_0,\vartheta_0]}{var}\; v(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \underset{[t_0,\vartheta_0]}{var}\; v_i(\xi) \leq a \qquad (a > 0),$$

где v_i – i-я координата вектора v.

Производные в (1) понимаются в обобщенном смысле [7].

Согласно формуле Коши решения уравнения (1) можно представить в виде:

$$x[v(t)] = X(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)B(s)dv(s), \qquad (2)$$

где $X(t,s)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$

В R^K, где K – целое число, удовлетворяющее неравенству $1 \leq K \leq n$, для каждого $t \in [t_0, \vartheta_0]$ задано непустое выпуклое множество $M(t)$. Будем предполагать, что многозначное отображение $t \to M(t)$ удовлетворяет следующему условию: для любых t_1 и t_2 из отрезка $[t_0, \vartheta_0]$, подчиненных неравенству

$$h(M(t_1), M(t_2)) \leq \varphi(t_1) - \varphi(t_2), \qquad (3)$$

где $\varphi(t)$ – неубывающая на $[t_0, \vartheta_0]$ ограниченная функция; $h(M_1, M_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами [8].

Пусть $C(t)$ – $n \times K$ – матрица-функция, элементы которой – функции ограниченной вариации; $\alpha(t)$ – неубывающая на $[t_0, \vartheta_0]$ ограниченная функция.

Введем обозначение

$$\gamma(\alpha, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{\vartheta_0} \rho(C(t)x[v(\cdot)], M(t)) d\alpha(t), \qquad (4)$$

где $\rho(y, M)$ – функция расстояния от точки $y \in R^K$ до множества $M \in R^K$ [8]. Интеграл в (4) понимается в смысле Лебега-Стилтьеса [9].

Покажем, что подынтегральная функция в (4) есть функция ограниченной вариации.

Согласно [8, с.45]

$$|\rho(z_1, M) - \rho(z_2, M)| \leq |z_1 - z_2|, \qquad (5)$$

где z_1 и z_2 – точки, а M – множество из R^K. Из определения хаусдорфова расстояния [8, с.75] и расстояния от точки до множества [8, с.45] следует справедливость неравенства

$$|\rho(z, M_1) - \rho(z, M)| \leq h(M_1, M_2), \qquad (6)$$

где z – точка, а M_1 и M_2 – множества из R^K. Из цепочки неравенств:

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\rho(z(t_{i+1}), M(t_{i+1})) - \rho(z(t_i), M(t_i))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N-1} \left|\rho(z(t_{i+1}), M(t_{i+1})) - \rho(z(t_{i+1}), M(t_i))\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left|\rho(z(t_{i+1}), M(t_i)) - \rho(z(t_i), M(t_i))\right| \leq \sum_{i=1}^{N-1} h(M(t_{i+1}), M(t_i)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left|z(t_{i+1}) - z(t_i)\right| \leq \varphi(\vartheta_0) - \varphi(t_0) + \underset{[t_0, \vartheta_0]}{var}\, z(t),$$

построенной с помощью (3), (5)-(6), следует ограниченность вариации подынтегральной функции в (4).

Задача I. Требуется минимизировать функционал (4) по $v \in \mathcal{V}(\cdot/a)$ вдоль траекторий системы (I).

Функционал (4) в силу определения функции расстояния и опорной функции [8] можно записать в виде:

$$\gamma(\alpha, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{\vartheta_0} \max_{\|\lambda\| \leq 1} \gamma_1(\lambda, v(\cdot))\, d\alpha(t), \qquad (7)$$

где

$$\gamma_1(\lambda, v(\cdot)) = \lambda^T C(t) x[v(\cdot)] - \rho_{M(t)}(\lambda),$$

$x[v(\cdot)]$ – решение уравнения (I); λ - k-мерный вектор, $\rho_M(\lambda)$ – опорная функция выпуклого множества M.

Операция взятия максимума в (4) порождает многозначное отображение Λ, ставящее в соответствие каждой точке $t \in [t_0, \vartheta_0]$ некоторое множество значений λ из единичного шара $\|\lambda\| \leq 1$. Согласно [10, с.175] отображение будет α-измеримым. Тогда в силу [10, с.179] существует α-измеримая однозначная ветвь λ из Λ, что

$$\rho(C(t)x(t), M(t)) = \lambda^T(t) C(t) x[v(\cdot)] - \rho_{M(t)}(\lambda(t)).$$

Обозначим через L множество α-измеримых вектор-функций $\lambda(\cdot)$ со значениями в единичном шаре $\|\lambda\| \leq 1$.

После подстановки в (4) $x[v(\cdot)]$ из (2) задача I примет следующий вид:

Задача I*. Требуется вычислить:

$$\gamma_0(a) = \inf_{v \in U(\cdot/a)} \max_{\lambda(\cdot) \in L} w(\alpha, \lambda, v),$$

где

$$w(\alpha, \lambda, v) = \int_{t_0}^{\vartheta_0} [\lambda^{\cdot}(t) C(t) X(t, t_0) x^0 - \rho_{N(t)}(\lambda(t))] d\alpha(t) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\vartheta_0} \int_{t_0}^{t} \lambda^T(t) C(t) X(t, s) B(s) dv(s) d\alpha(t).$$

Поменяв порядок интегрирования в двойном интеграле согласно теореме Фубини [9] , получим:

$$w(\alpha, \lambda, v) = \int_{t_0}^{\vartheta_0} [\lambda^T(t) C(t) X(t. t_0) x^0 - \rho_{N(t)} \lambda(t))] d\alpha(t) + \int_{t_0}^{\vartheta_0} \int_{t}^{\vartheta_0} \lambda^T(t) C(s) X(t, s) B(s) d\alpha(t) dv(s). \qquad (8)$$

Теперь с помощью теоремы Фань-Цзн [II] задаче I* поставим в соответствие двойственную задачу. В идейном отношении рассматриваемая конструкция родственна [I, 2, I2] .

Из вогнутости $w(\alpha, \lambda, v)$ по λ и линейности по v следует равенство согласно [II] :

$$\gamma_0(\alpha) = \inf_{v \in U(\cdot/a) \lambda(\cdot) \in L} \max_{\lambda(\cdot) \in L} w(\alpha, \lambda, v) = \max_{\lambda(\cdot) \in L} \inf_{v \in U(\cdot/a)} w(\alpha, \lambda, v). \qquad (9)$$

Лемма I. Для любой системы функций

$$f_i(\cdot) \in BV[t_0, \vartheta_0] \quad (i \in \overline{1,m}) . \qquad \text{и } v(\cdot) \in v(\cdot/a)$$

справедливо равенство

$$\inf_{v \in U(\cdot/a)} \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{\vartheta_0} f_i(t) dv_i(t) = -a \max_{i \in \overline{1,m}} \sup_{[t_0, \vartheta_0]} |f_i(t)|.$$

Доказательство. Для любого $i \in \overline{1,m}$ очевидно справедливы неравенства

$$-\sup_{[t_0, \vartheta_0]} |f_i(t)| \operatorname{var}_{[t_0, \vartheta_0]} v_i(t) \le \int_{t_0}^{\vartheta_0} f_i(t) dv_i(t) \le \sup_{[t_0, \vartheta_0]} |f_i(t)| \operatorname{var}_{[t_0, \vartheta_0]} v_i(t).$$

Просуммировав последние по i, получим:

$$-\sum_{i=1}^{m}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|\operatorname*{var}_{[t_0,\vartheta_0]}v_i(\xi)\leq\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\vartheta_0}f_i(t)dv_i(t)\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|\operatorname*{var}_{[t_0,\vartheta_0]}v_i(\xi).$$

Заменим $\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|$ на $\max_{i\in\overline{1,m}}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|$ (неравенство от этого лишь усилится). Учитывая, что в силу ограничения $v(t)\in v(\cdot/a)$ $\sum_{i=1}\operatorname*{var}_{[t_0,\vartheta_0]}v_i(t)\leq a$,

имеем:

$$-a\max_{i\in\overline{1,m}}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|\leq\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\vartheta_0}f_i(t)dv_i(t)\leq$$

$$\leq a\max_{i\in\overline{1,m}}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_i(t)|.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{v\in U(\cdot/a)}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\vartheta_0}f_i(t)dv_i(t)\geq-a\max_{i\in\overline{1,m}}\sup_{[t_0,\vartheta_0]}f_i(t).\qquad(10)$$

Пусть экстремум в правой части неравенства (10) достигается при $i=i^*$ и на последовательности $t_p\to t^*$, т.е.

$\lim_{p\to\infty}|f_{i^*}(t^*)|=\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_{i^*}(t)|$. Положим $v_{i,p}(t)\equiv 0$

при $i\neq i^*$, $v_{i^*,p}(t)=-a\,sign|f_{i^*}(t_p)|\chi(t-t_p)$.

Тогда $\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\vartheta_0}f_i(t)dv_{i,p}(t)=-a|f_{i^*}(t_p)|$.

Переходя в последнем равенстве к пределу, убеждаемся, что

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\vartheta_0}f_i(t)dv_{i,p}=-a\sup_{[t_0,\vartheta_0]}|f_{i^*}(t)|.\qquad(11)$$

Из (II) следует, что существует допустимая последовательность $v_p(t)$, реализующая в (I0) точное равенство, а это и доказывает справедливость леммы.

Замечание. Если $\max\limits_{\kappa\in\overline{1,m}} \sup\limits_{[t_0,\vartheta_0]} |f_\kappa(t)|$ достигается на счетном множестве точек $(\kappa^*, t_{\kappa^*,i})$, то, как видно из доказательства леммы, экстремум функционала достигается на множестве ступенчатых функций вида:

$$v_{0\kappa^*}(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_{\kappa^*,i}\, \operatorname{sign} f_{\kappa^*}(t_{\kappa^*,i})\,\chi(t - t_{\kappa^*,i}),$$

$$a_{\kappa^*,i} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa,i} = a,\ v_{0,j}(t) \equiv 0,$$

если при данном j $\max\limits_{\kappa\in\overline{1,m}} \sup\limits_{[t_0,\vartheta_0]} |f_\kappa(t)|$ не достигается. В случае, когда $\max\limits_{\kappa\in\overline{1,m}} \sup\limits_{[t_0,\vartheta_0]} |f_\kappa(t)|$ достигается на множествах вида $(\kappa^*, [a_{j^*}, b_{j^*}])$, то оптимальная функция $v_0(t)$ может содержать и непрерывную составляющую.

Из (8), (9) и леммы I следует

Теорема I. Для оптимального результата задачи I справедливо представление

$$\inf_{v(\cdot)\in U(\cdot/a)} \gamma(\alpha, v(\cdot)) = \max_{\Lambda(\cdot)\in L} \rho(\alpha, \Lambda(\cdot)),$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \Lambda(\cdot)) &= \inf_{v(\cdot)\in U(\cdot/a)} w(\alpha, \Lambda(\cdot), v(\cdot)) = \\ &= \Big\{ \int_{t_0}^{\vartheta_0} \big[\Lambda^T(t) C(t) X(t, t_0) x^0 - \rho_{M(t)}(\Lambda(t))\big] d\alpha(t) - \\ &- a \max_{i\in\overline{1,m}} \sup_{s\in[t_0,\vartheta_0]} \Big| \int_s^{\vartheta_0} \langle \Lambda^T(t) C(s) X(t,s) B(s)\rangle_i\, d\alpha(t)\Big| \Big\}, \end{aligned} \tag{I2}$$

через $\langle f\rangle_i$ обозначена i-я координата вектора-строки $f\in R^m$.

Теорема 2. Для оптимальности управления $v_0(t)\in U(\cdot/a)$ необходимо, чтобы

$$\min_{v(\cdot)\in U(\cdot/a)} w(\alpha, \Lambda_0, v) = w(\alpha, \Lambda_0, v_0), \tag{I3}$$

где $\lambda_0(t)$ – вектор-функция, доставляющая экстремум в (I2). Справедливость теоремы следует из свойств седловой точки λ_0, v_0.

Теорема 3. Для оптимальности управления $v_0(\cdot)\in v(\cdot/a)$, удовлетворяющего условию (I3) достаточно, чтобы вектор-функция ограниченной вариации, доставляющая экстремум в (I2), удовлетворяла условиям $\|\lambda_0(t)\|=1$ и на траектории $x_0(t)$, соответствующей управлению $v_0(t)$, α почти всюду выполнялось равенство

$$\rho(C(t)x_0(t), M(t)) = \lambda_0^T(t)C(t)x_0(t) - \rho_{M(t)}(\lambda_0(t)). \qquad (I4)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует управление $v(t)$ и соответствующая траектория системы (I) $x(t)$, для которой выполняется неравенство

$$\gamma(\alpha, v(\cdot)) < \gamma(\alpha, v_0(\cdot)). \qquad (I5)$$

Согласно (I4), теореме 2 и формуле (2):

$$\gamma(\alpha, v_0(\cdot)) = \int_{t_0}^{\vartheta_0} \rho(C(t)x_0(t), M(t))\,d\alpha(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta_0}\Big[\lambda_0^T(t)C(t)X(t,t_0)x^0 - \rho_{M(t)}(\lambda_0(t) + \lambda_0^T(t)C(t)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)dv_0(\tau)\Big]d\alpha(t) \leq \int_{t_0}^{\vartheta_0}\Big[\lambda_0^T(t)C(t)X(t,t_0)x^0 -$$

$$- \rho_{M(t)}(\lambda_0(t) + \lambda_0^T(t)C(t)\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)dv(\tau)\Big]d\alpha(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta_0}\Big[\lambda_0^T(t)C(t)x(t) - \rho_{M(t)}(\lambda_0(t))\Big]d\alpha(t) \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{\vartheta_0} \rho(C(t)x(t), M(t))\,d\alpha(t).$$

Сравнивая последнее неравенство с предположением (I5), убеждаемся в справедливости теоремы.

Достаточные условия оптимальности в задачах импульсного управления рассматривались, например в [2, 4], но в этих ра-

ботах либо функционал был другого вида, либо рассматривались другие ограничения на управление.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., 1968. 476 с.

2. Куржанский А.Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск, 1975. С.131-156.

3. Миллер Б.М. Условие оптимальности в задаче управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с мерой // Автом. и телемех. 1982. № 6. С.60-72.

4. Орлов Ю.В. Вариационный анализ оптимальных систем с обобщенными управлениями типа меры. I,II.// Автом. и телемех. 1987. № 2. С.26-32; № 3. С.36-48.

5. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика, 1986. № I. С.59-64.

6. Сесекин А.Н., Ченцов А.Г. Об оптимальном осуществлении заданных движений линейной дискретной системой с ограниченными ресурсами // Автом. и телемех. 1986. № 6. С.56-61.

7. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 280 с.

8. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964. 432 с.

9. Камке Е. Интеграл Лебега-Стилтьеса. М., 1959. 328 с.

10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Пер. с англ. М., 1977. 624 с.

11. Фань-Цзы. Теоремы о минимаксе: Бесконечные антагонистические игры. М., 1963. С.31-39.

12. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М., 1970. 420 с.

УДК 519.6

А.Г.Ченцов (Уральский политехнический институт)

РАСШИРЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ В ЗАДАЧАХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

I. Введение. Рассматриваются задачи математического программирования (МП) [1, 2] и оптимального управления (ОУ) [3, 4]. Используются двойственные конструкции [5, 6]; формализация приближенных решений соответствует [7]. Для одной задачи ОУ с фазовыми ограничениями (ФО) получено выражение функции Беллмана.

Пусть E – непустое множество, $B(E)$ – множество всех вещественнозначных ограниченных функций на E, $s_0 \in B(E)$, $\phi \neq \Omega \subset B(E)$.

Задаче МП

$$s_0(x) \to \inf, \quad x \in E, \quad \omega(x) \leq 0. \quad (\omega \in \Omega) \qquad (1.1)$$

сопоставим семейство ее релаксаций

$$\omega(x) < \varepsilon, \quad (\omega \in K), \qquad (1.2)$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$ и K – конечное подмножество Ω. Подобно [7] вводим приближенные решения – направленности [8] в E, соблюдающие каждое ограничение (1.2), начиная с некоторого момента [8, с.96], и обладающие свойством сходимости соответствующей направленности значений s_0. Пусть $\mathcal{X}_1$ – семейство всех множеств $\{x : x \in E, (\forall \omega \in K : \omega(x) < \varepsilon)\}$, где $\varepsilon \in]0, \infty[$ и K – конечное подмножество Ω. В условиях совместности релаксаций (1.2) имеем в качестве $\mathcal{X}_1$ нечеткое ограничение (НО) [7]; асимптотическое значение задачи (1.1) определяем, как $(\mathcal{X}_1 - \underline{\min})[s_0]$ [7, с.19]. Смешиванием (1.1) назовем задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_0(x_i) \to \inf, \quad m \text{ – натуральное число},$$
$$\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1;$$
$$x_1 \in E, \ldots, x_m \in E, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega(x_i) \leq 0 \ (\omega \in \Omega). \qquad (1.3)$$

Задачи (I.I), (I.3) некорректны [9, I0], так что используем серию релаксаций

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \omega(x_i) \le \varepsilon \qquad (\omega \in K), \tag{I.4}$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$ и K – конечное подмножество Ω. На основе (I.4) также можно определить НО $\mathcal{X}_2$ [7] и асимптотическое значение задачи (I.3) [7, с.I9]. Нахождение асимптотических значений составляет основную цель работы.

2.Символика. Используем кванторы, связки, символы def (по определению) и $\triangleq$ (равно по определению); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество. Если U и V – непустые множества, то через V^U обозначим множество всех функций, действующих из U в V. Пусть $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$, R – числовая прямая;

$$\forall k \in \mathcal{N}: \overline{1,k} \triangleq \{i : i \in \mathcal{N},\ i \le k\},\ R_k \triangleq R^{\overline{1,k}},$$

R_k^+ – положительный конус R_k.

Множество E наделяем полуалгеброй (см. [I2, с.46], [I3, с.37, 39]) $\mathcal{X}$ его подмножеств, для которой (обозначения [I3, с.60], [I4, с.75]) $s_0 \in B(E, \mathcal{X})$, $\Omega \subset B(E, \mathcal{X})$; $B(E, \mathcal{X})$ – множество всех равномерных пределов ступенчатых отображений $(E, \mathcal{X})$ в R; E – полуалгебра $\mathcal{X}$, удовлетворяющая упомянутому условию на (s_0, Ω), непременно существует. Пусть $(add)_+[\mathcal{X}]$ есть def множество всех конечно-аддитивных мер на $\mathcal{X}$ [I4, с.74]; см. также [I5, I6]. Через $P_0(\mathcal{X})$ обозначим выпуклую оболочку [I7, с.I3] множества всех мер Дирака $\delta_x \in (add)_+[\mathcal{X}]$, $x \in E$. Элементы $P_0(\mathcal{X})$ формализуют эффект конечных вавесей в (I.3), (I.4). Пусть $P(\mathcal{X})$ есть def множество всех $\mu \in (add)_+[\mathcal{X}]$, таких, что $\mu(E) = 1$;

$$T(\mathcal{X}) \triangleq \{\mu : \mu \in P(\mathcal{X}), (\forall L \in \mathcal{X} : (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1))\}.$$

Через $A(\mathcal{X})$ обозначим множество всех мер $\mu - \nu$, когда μ и ν пробегают $(add)_+[\mathcal{X}]$; $A(\mathcal{X})$ с нормой-вариацией изометрически изоморфно $B^*(E, \mathcal{X})$ (топологическое сопряженное $B(E, \mathcal{X})$, так что наделяем $A(\mathcal{X})$ $*$ -слабой топологией [I5, гл.У]; [I6, с.26] $\tau_*(\mathcal{X})$. При этом

$$P(\mathcal{X}) = \overline{P_0(\mathcal{X})}\,,\ T(\mathcal{X}) = \overline{\{\delta_x : x \in E\}}\,,$$

здесь черта сверху означает замыкание в $(\mathbb{A}(\mathcal{X}), \tau_*(\mathcal{X}))$.

3. Расширения. Если (I.2) совместно при любом выборе $\varepsilon \in]0, \infty[$ и конечного множества K, $K \subset \Omega$, то Ω именуем слабо совместным множеством; в этом случае $\mathfrak{X}_1$ есть базис фильтра E и асимптотическое значение задачи (I.I) определяется, как в I. Через S обозначим множество всех $\mu \in T(\mathcal{X})$ таких, что $\forall \omega \in \Omega : \int\limits_E \omega(x)\mu(dx) \le 0$; интеграл понимается в соответствии с [4, с.75].

Теорема 3.1. Множество Ω слабо совместно тогда и только тогда, когда $S \neq \phi$.

Теорема 3.2. Пусть $S \neq \phi$. Тогда $(\mathfrak{X}_1 - \underline{min})[s_0]$ является значением задачи

$$\int\limits_E s_0(x)\mu(dx) \longrightarrow min\,,\ \mu \in S. \qquad (3.1)$$

Задача (3.I) разрешима (минимум достигается).

Множество Ω назовем слабо совместным при смешивании, если (I.4) совместно при всяком выборе $\varepsilon \in]0, \infty[$ и конечного множества K, $K \subset \Omega$. Через $\hat{S}$ обозначим множество всех мер $\mu \in P(\mathcal{X})$ таких, что $\forall \omega \in \Omega$: $\int\limits_E \omega(x)\mu(dx) \le 0$.

Теорема 3.3. Множество Ω слабо совместно при смешивании тогда и только тогда, когда $\hat{S} \neq \phi$.

Пусть $\mathfrak{X}_2$ – семейство всех множеств:

$$\{\mu : \mu \in P_0(\mathcal{X}),\ (\forall \omega \in K : \int\limits_E \omega(x)\mu(dx) < \varepsilon)\}\,,$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$ и K – конечное подмножество Ω. Если Ω слабо совместно при смешивании, то $\mathfrak{X}_2$ есть базис фильтра $P_0(\mathcal{X})$, т.е. НО [7]. Через h_0 обозначим функцию на $P_0(\mathcal{X})$ такую, что $h_0(\mu) = \int\limits_E s_0(x)\mu(dx)$.

Если $\hat{S} \neq \phi$, то $(\mathfrak{X}_2 - \underline{min})[h_0] \in R$ [7] есть асимптотическое значение задачи (I.3).

Теорема 3.4. Пусть $\hat{S} \neq \phi$. Тогда $(\mathfrak{X}_2 - \underline{min})[h_0]$ является значением задачи

$$\int_E s_0(x)\mu(dx) \to \min, \ \mu \in \hat{S}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.5. Пусть $\hat{S} \neq \phi$. Тогда

$$(\mathcal{X}_2 - \underline{min})[h_0] = \\ = \sup_{m \in N} \ \sup_{(\omega_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \Omega^m} \ \sup_{(\ell_i)_{i \in \overline{1,m}} \in R^+_m} \ \inf_{x \in E} (s_0(x) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \ell_i \omega_i(x)). \tag{3.3}$$

4. Аппроксимативная выпуклость. Задачу (I.I) назовем аппроксимативно выпуклой (а.в.), если при всяком выборе $\varepsilon \in]0, \infty[$ и конечного множества K, $K \subset \Omega$, имеем $\forall \alpha \in [0, 1]$, $x \in E$, $y \in E$, что $\exists \bar{x} \in E: \forall u \in \{s_0\} \cup K$

$$u(\bar{x}) \leq (\alpha u(x) + (1-\alpha) u(y)) + \varepsilon.$$

Слабая совместность Ω влечет слабую совместность при смешивании.

Теорема 4.I. Пусть Ω слабо совместно, задача (I.I) а.в., тогда

$$(\mathcal{X}_1 - \underline{min})[s_0] = (\mathcal{X}_2 - \underline{min})[h_0].$$

Итак, если $S \neq \phi$ и задача (I.I) а.в., то $(\mathcal{X}_1 - \underline{min})[s_0]$ определяется (3.3). В $B(E)$ вводим $\sup$-норму $\|\cdot\|$ [I5, с.26]. Если Ω слабо совместно и вполне ограничено в $(B(E), \|\cdot\|)$ [I5, с.34], то семейство $\mathcal{X}_3$ всех множеств $\{x: x \in E, (\forall \omega \in \Omega: \omega(x) < \varepsilon)\}$, $\varepsilon \in]0, \infty[$ есть НО [7] и $(\mathcal{X}_3 - \underline{min})[s_0] \in R$.

Теорема 4.2. Пусть Ω слабо совместно и вполне ограничено в $(B(E), \|\cdot\|)$. Тогда

$$(\mathcal{X}_1 - \underline{min})[s_0] = (\mathcal{X}_3 - \underline{min})[s_0]; \tag{4.I}$$

если задача (I.I) а.в., то (4.I) определяется максимином в правой части (3.3).

5. Задача СУ. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + G(t, u), \ u \in P. \tag{5.I}$$

Здесь x – n -мерный фазовый вектор $(n \in \mathcal{N})$; $A(\cdot)$ и $G(\cdot,\cdot)$ – непрерывные функции, первая из которых матрично-значна; P – непустой конечномерный компакт. Функционирование (5.I) рассматриваем на отрезке $I \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ $(t_0 < \vartheta_0)$; $T \triangleq [t_0, \vartheta_0[$. Через $\mathcal{U}$ обозначим множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа на T функций $U \in P^I$. Фиксируем начальные условия $x(t_0) = x_0$ (заданный n -мерный вектор); $\forall U \in \mathcal{U}$ через φ_U обозначим движение (5.I), порожденное U из (t_0, x_0) . Тогда φ_U – непрерывная вектор-функция, определенная на I , вектор $\varphi_U(t)$ имеет размерность n . Выберем $k \in \overline{1,n}$ в качестве размерности пространства геометрических координат; $[x]_k$ есть def вектор первых k координат n -мерного вектора x . В k -мерном пространстве определим систему множеств N_t , $t \in I$; полагаем при этом относительно ФО $N_{(\cdot)}$, что N_t , $N_t \neq \phi$, ограничены в совокупности, выпуклы и замкнуты. Зависимость N_t от времени полагаем непрерывной (на I) в метрике Хаусдорфа [18, с.171] ; само k -мерное пространство наделяем евклидовой нормой. Введем также непустой выпуклый компакт M в k -мерном пространстве.

Если S^* -непустой компакт в k -мерном пространстве, то через $\rho(\cdot, S^*)$ обозначаем функцию евклидова расстояния до S^*. Множество E отождествляем с $\mathcal{U}$; $s_0(U)$ определяем, как $\rho([\varphi_U(\vartheta_0)]_k, M)$; Ω полагаем состоящим из всевозможных отображений

$$U \longmapsto \rho([\varphi_U(t)]_k, N_t) : \mathcal{U} \to R \qquad (t \in T).$$

Рассмотрим получившуюся задачу (I.I),

$$s_0(U) \to inf, \ U \in \mathcal{U}, \ [\varphi_U(t)]_k \in N_t \quad (t \in T),$$

предполагая слабую совместность Ω , которое к тому же вполне ограничено в $B(E) = B(\mathcal{U})$, так что справедливо (4.I). Наконец, такая задача (I.I) а.в., так что для нахождения (4.I) можно использовать (3.3).

Через $\Phi(\cdot,\cdot)$ обозначим фундаментальную матрицу-функцию (решений) системы $\dot{x} = A(t)x$. Определим систему множеств Γ_t ; $t \in I$, полагая $\Gamma_t \triangleq N_t$ при $t \in T$

и $\Gamma_{\vartheta_0} \triangleq M$. Через L обозначим замкнутый единичный евклидов шар k-мерного пространства с центром в начале координат. Если $m \in \mathcal{N}$, полагаем, что T_m есть def множество всех "наборов" $(t_i)_{i \in \overline{1,m}} \in T^m$ таких, что $\forall i \in \overline{1,m}$, $i < m$ имеет место $t_i \le t_{i+1}$. Пусть $\forall m \in \mathcal{N} : \overline{0,m} = \{0\} \cup \overline{1,m}$; если $(t_i)_{i \in \overline{1,m}} \in T_m$, то

$$(t_i^*)_{i \in \overline{0,m+1}} : \overline{0,m+1} \to I$$

определяем условиями

$$(t_0^* \triangleq t_0) \& (\forall j \in \overline{1,m} : t_j^* \triangleq t_j) \& (t_{m+1}^* \triangleq \vartheta_0).$$

Аналогичным образом, $\forall m \in \mathcal{N}$, $(\ell_i)_{i \in \overline{1,m}} \in R_m^+$ полагаем $(\ell_i^0)_{i \in \overline{1,m+1}} \in R_{m+1}^+$ таким, что $\ell_i^0 \triangleq \ell_i$ при $i \in \overline{1,m}$ и $\ell_{m+1}^0 \triangleq 1$. Наконец, если $t \in I$ и h есть k-мерный вектор, то через $\rho_0(\Gamma_t)(h)$ обозначаем значение опорной функции Γ_t в точке h, т.е. максимальное (на Γ_t) значение скалярного произведения $h'\gamma$, $\gamma \in \Gamma_t$; штрих здесь и ниже используем при обозначении скалярного произведения в качестве указателя транспонирования.

Теорема 5.I. Задача ОУ с ФО N_t, $t \in T$, и критерием качества $s_0(U)$, $U \in \mathcal{U}$, обладает асимптотическим значением:

$$(\mathcal{X}_1 - \underline{min})[s_0] = (\mathcal{X}_3 - \underline{min})[s_0] =$$

$$= \sup_{m \in \mathcal{N}} \sup_{(t_i)_{i \in \overline{1,m}} \in T_m} \sup_{(\ell_i)_{i \in \overline{1,m}} \in R_m^+} \max_{\Lambda \in L^{m+1}} \sum_{i=1}^{m+1} (\ell_i^0((\Lambda(i))'[\Phi(t_i^*, t_0)x_0]_k - \rho_0(\Gamma_{t_i^*})(\Lambda(i)) + \int_{t_{i-1}^*}^{t_i^*} \min_{u \in P} \sum_{j=i}^{m+1} \ell_j^0 (\Lambda(j))' [\Phi(t_j^*, t) G(t,u)]_k \, dt). \qquad (5.2)$$

Равенство (5.I) устанавливается методами [I9], идейной основой которых является общий принцип двойственности [4]. Подробные обоснования всех утверждений настоящей статьи см. в [20].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960. 400 с.

1. Хелли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., 1967. 507 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 1979. 429 с.

3. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. М., 1961. 391 с.

4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. 475 с.

5. Даффин Р.Дж. Бесконечные программы: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959. С.263-276.

6. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., 1971. 351 с.

7. Ченцов А.Г. Оптимизация в условиях нечетких ограничений. Препринт ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. 54 с.

8. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1981. 431 с.

9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 288 с.

10. Иванов В.К. Некорректные задачи в топологических пространствах // Сибирский матем.журн. 1969. № 5. С.1065-1074.

11. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964. 431 с.

12. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М., 1969. 309 с.

13. Ченцов А.Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск, 1985. 128 с.

14. Ченцов А.Г. К вопросу об универсальной интегрируемости ограниченных функций // Мат.сборник. 1986. Т.131, № 9. С.73-93.

15. Данфорд Дж., Шварц Дж.Т. Линейные операторы: Общая теория. М., 1962. 895 с.

16. Ченцов А.Г. Конечно-аддитивное интегрирование ограниченных функций. Препринт ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. 59 с.

17. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979. 400 с.

18. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977. 624 с.

19. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика. 1986. № 1. С.59-64.

20. Ченцов А.Г. Некоторые задачи асимптотической оптимизации и соотношения двойственности / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1986. Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 1910-В87. 36 с.

УДК 519.854.2

Л.В.Зудихин (Институт математики и механики УрО АН СССР)

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НАЗНАЧЕНИЯ

I. Введение

В статье рассматривается динамический процесс назначения заданий (работ, операций) некоторой совокупности исполнителей. Моменты начала выполнения задания предполагаются заранее зафиксированными, а продолжительность выполнения неизвестна. Изучение таких задач представляет интерес по двум причинам: во-первых, в связи с наличием широкого круга реальных ситуаций, где при распределении заданий важен именно момент начала их выполнения при неизвестной априори продолжительности, во-вторых, из-за недостаточной освещенности в литературе подобных динамических процессов. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача диспетчера. Диспетчер, организующий работу K исполнителей, распределяет заказы на выполнение работ по обслуживанию M клиентов в желательное для каждого из них время. Каждый исполнитель должен обслужить не менее N клиентов $(KN = M)$. Стоимость перемещения от одного клиента к другому может быть либо известна априори, если оговорены продолжительность работы и вид перемещения, либо неизвестна и определится например, заданными возле каждого клиента видами транспорта и оценкой времени на выполнение заказа, проводимой по прибытию к клиенту.

Диспетчеру требуется организовать оптимальное, с точки зрения заданного критерия качества, назначение заданий исполнителям, если качество процесса оценивается взвешенной суммой временных и материальных затрат на перемещение.

Следующий пример является частным случаем приведенной выше задачи.

Задача инкассатора. Бригада из K инкассаторов обслуживает M торговых точек (далее просто точек) по N штук каждый $(KN = M)$. Оговорено время с определенным для каждой точки периодом изъятия средств (денег) инкассатором в точке. Предполагаются следующие условия:

- время накопления средств в каждой точке существенно превосходит наибольший период времени обслуживания;
- каждый инкассатор работает в условиях полной информации о действиях членов бригады;
- априори известен алгоритм вычисления затрат перехода от точки к точке.

Требуется организовать распределение торговых точек между инкассаторами:

- обеспечивающее минимальные энергетические затраты;
- удовлетворяющее заданному ограничению на затраты;
- обеспечивающее обслуживание точек за минимальное время.

Прежде чем перейти к формальной постановке задачи, выделим основные моменты, отличающие рассмотренные примеры от известных в литературе [I, 2] задач о назначении, динамических потоках в сетях и теории расписаний. Для этого сопоставим задаче линейный ориентированный граф $G = (X, \Lambda)$, состоящий из совокупности вершин $x \in X$ и множества пар Λ элементов $x \in X$, $y \in Y : (x, y) \in \Lambda$, называемых ребрами. Вершину в нашем случае отождествим с парой $(p, T_p) = x$, где параметр p определяет позицию точки (клиента), а T_p - момент начала обслуживания. Ориентация ребра задается моментами T_q, T_p, приписанными соответствующим вершинам $y = (q, T_q)$ и x : при $T_p < T_q$ ребро (x, y) ориентировано от x в y. Тогда упомянутое отличие состоит в следующем:

- неизвестна заранее энергетическая стоимость ребра графа и определяется лишь в момент T_p прихода в соответствующую начальную вершину x;
- каждой вершине соответствует заданный момент начала выполнения задания;
- время выполнения задания априори неизвестно и определяется в момент T_p прихода в соответствующую начальную вершину x (в частности, может быть равно нулю);
- позиция p может повторяться во времени в паре с соответ-

ствующим моментом $T_p^{(i)}$: $(p, T_p^{(1)}), \ldots, (p, T_p^{(n)})$ в случае, если ранее не произведено обслуживания.

Приведенные отличия не позволяют использовать известные методы для решения задачи диспетчера. Однако в частном случае (задача инкассатора) при некоторых дополнительных условиях можно свести поставленную задачу к рассмотренной в теории расписаний задаче минимизации максимального штрафа за обслуживание n требований [I] m приборами, когда допускается прерывание в обслуживании любого требования. При этом задано отношение строгого порядка, определяющее возможную последовательность обслуживания требований.

В работе предложена численная процедура минимизации взвешенной суммы затрат на выполнение задания. Алгоритм реализован в виде программы на ЭВМ.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим абстрактное пространство позиций P. Пусть на этом пространстве задано M многозначных отображений (заданий)

$$A_i : P \to \mathscr{P}, \tag{I}$$

где $\mathscr{P} = 2^P$, $i \in \overline{1,M}$. Затраты на выполнение задания A_i определим неотрицательной функцией

$$B_i : \bigcup_{p \in P} (\{p\} \times A_i(p)) \to R. \tag{2}$$

Назовем далее планом выполнение N заданий из M возможных. Тогда процесс выполнения плана составит последовательность:

I) $\alpha_1 \in \overline{1,M}$, $p_0 \in \mathscr{P}$

$p_{\alpha_1} \in A_{\alpha_1}(p_0)$, $p_{\alpha_1} > p_0$;

2) $\alpha_2 \in \overline{1,M} / \{\alpha_1\}$

$p_{\alpha_2} \in A_{\alpha_2}(p_{\alpha_1})$, $p_{\alpha_2} > p_{\alpha_1}$;

. . . . . .

N) $\alpha_N \in \overline{1,M} / (\{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \ldots \cup \{\alpha_{N-1}\})$

$p_{\alpha_N} \in A_{\alpha_N}(p_{\alpha_{N-1}})$, $p_{\alpha_N} > p_{\alpha_{N-1}}$,

осуществляемую выбором номера $\alpha_l \in \overline{1,M}$ $(l \in \overline{1,N})$ и позиции пространства P, на котором введен линейный предпорядок: для всяких p и q либо $p > q$ либо $q > p$. Позиция p_0 в данном случае зафиксирована, а выбор элементов p_{α_l} множества $A_{\alpha_l}(p_{\alpha_{l-1}})$, $l \in \overline{1,N}$, подчинен условию

$$p_{\alpha_{i-1}} < p_{\alpha_i} < p_T,$$

где $p_T \in \mathcal{P}$ - выбранная априори конечная позиция. Случай $p_{\alpha_i} > p_T$ $(i \in \overline{1,N})$ означает невыполнение плана.

Таким образом, выбранная последовательность $p_\alpha = (p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_N})$ определит величину затрат Θ_α при выполнении плана

$$\Theta_\alpha = \sum_{i=1}^{N} B_{\alpha_i}(p_{\alpha_{i-1}}, p_{\alpha_i}). \qquad (3)$$

Здесь символом α обозначена выбранная последовательность $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Задача I. Определить пару (α^0, p_{α^0}), минимизирующую величину суммарных затрат на выполнение плана

$$\Theta^0 = \min_{\alpha} \min_{p_\alpha} \sum_{i=1}^{N} B_{\alpha_i}(p_{\alpha_{i-1}}, p_{\alpha_i}). \qquad (4)$$

Задача 2. Определить пару (α^*, p_{α^*}), обеспечивающую выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{N} B_{\alpha_i}(p_{\alpha_{i-1}}, p_{\alpha_i}) \leq \Delta, \qquad (5)$$

где $\Delta \geq 0$ заданная константа.

Задача 3. Среди всех пар (α^*, p_{α^*}), решающих задачу 2, определить пару, параметр $p_{\alpha^*_N}$ которой минимален $(p_{\alpha^*} = (p_{\alpha^*_1}, \dots, p_{\alpha^*_N}))$.

В данной работе остановимся на исследовании задачи I, поставленной для одного исполнителя при $M = N$, предполагая производить дальнейшее обслуживание оставшихся клиентов исполнителями последовательно. Предложенные далее алгоритмы решения задачи I основываются на следующих понятиях и определениях.

По смыслу задачи совокупность позиций

$$P^{(j)} = \{p : p \in A_j(p_0),\ p < p_T\} \qquad (6)$$

при заданных p_0 и p_T конечна. Перенумеруем их произвольным образом:

$$p_k^{(j)} \in P^{(j)},\quad k \in \overline{1, K_j}.$$

Упорядочим далее множество позиций

$$\{p_\kappa^{(j)} : p_\kappa^{(j)} \in P^{(j)} ; \ \kappa \in \overline{1,\kappa_j} ; \ j \in \overline{1,N}\}$$

согласно заданному на $\mathcal{P}$ предпорядку. На полученном множестве упорядоченных по возрастанию позиций $P_L = \{p_\ell : \ell \in \overline{1,L}\}$ определим матрицу $\mathcal{G}$ задачи назначения (матрицу графа G) следующим образом. Элемент матрицы $\mathcal{G}\ (L \times N)$ зададим соотношением:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists \kappa : \kappa \in \overline{1,\kappa_j} \ \& \ p_\kappa^{(j)} = p_i ; \\ 0, & \forall \kappa : \kappa \in \overline{1,\kappa_j} \implies p_\kappa^{(j)} \neq p_i , \end{cases}$$

где $i \in \overline{1,L}$; $j \in \overline{1,N}$.

Определение I. Ненулевые элементы $\beta_{ij}\ (i \in \overline{1,L} ; j \in \overline{1,N})$ матрицы $\mathcal{G}$ назовем вершинами. Вершины $\beta_{\kappa\ell}$ и β_{ij} назовем несовпадающими, если $\ell \neq j$. Любую последовательность из N несовпадающих вершин

$$\beta_{j_1\kappa_1} , \dots , \beta_{j_N\kappa_N}$$

назовем N -цепью, если соответствующая последовательность позиций $p_{j_i}\ (i \in \overline{1,N})$ образует монотонную (в смысле введенного упорядочения) последовательность множества P_L :

$$p_{j_1} > p_{j_2} > \dots > p_{j_N} .$$

Таким образом, в задаче диспетчера всякой N -цепи будет соответствовать возможный вариант обслуживания клиентов и наоборот.

Определение 2. Весом N -цепи $\beta_{j_1\kappa_1} , \dots , \beta_{j_N\kappa_N}$ назовем величину

$$\Delta B = \sum_{i=0}^{N-1} B(p_{j_i} , p_{j_{i+1}}) . \qquad (7)$$

Следовательно, решение задачи I состоит в нахождении N - цепи минимального веса. Для численного нахождения N -цепи минимального веса предлагаются следующие алгоритмы.

3. Алгоритм I. Рассмотрим $N!$ матриц $\mathcal{G}_\kappa\ (\kappa \in \overline{1,N!})$, полученных из матрицы $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ перестановкой столбцов.

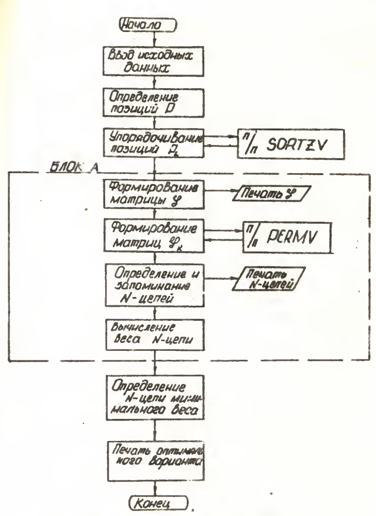


Рис. I. Блок-схема основной программы

Определение 3. Исходящей N -цепью матрицы φ_k $(k \in \overline{1,N!})$ назовем всякую N -цепь $(\ldots, \beta_{ij}, \beta_{kl}, \ldots)$ при условии $i<k$, $j<l$ для смежных элементов.

Алгоритм I состоит в определении для всякой матрицы $\mathcal{Y}_\kappa$ $(\kappa \in \overline{1, N!})$ набора нисходящих N -цепей, каждая из которых задается набором монотонно возрастающих чисел $\{\kappa_i \in \{1,\dots,L\}, \ i \in \overline{1,N}\}$, таких, что $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$ для всякого $i \in \overline{1,N}$. Число таких наборов для матрицы $\mathcal{Y}_\kappa$ обозначим $\ell(\kappa)$. Тогда величина $\mathcal{X} = \sum_{\kappa=1}^{N!} \ell(\kappa)$ будет совпадать с числом всех возможных вариантов обслуживания клиентов. Выпишем эти варианты:

$$\{(\kappa_1^{(j)},\dots,\kappa_N^{(j)}) : \kappa_i^{(j)} \in \{1,2,\dots,L\} \ ; \ \kappa_i^{(j)} < \kappa_{i+1}^{(j)} \ ;$$

$$\beta_{i\kappa_i^{(j)}} \neq 0 \ ; \ j \in \overline{1,\ell(n)} \ ; \ n \in \overline{1,N!}\}$$

или, после упорядочивания произвольным способом:

$$\{(\kappa_1^{(i)},\dots,\kappa_N^{(i)}) : i \in \overline{1,\mathcal{X}}\}.$$

Решение задачи I определится числом $i^* \in \overline{1,\mathcal{X}}$, соответствующим N -цепи минимального веса. Отметим некоторые особенности алгоритма I и приведем блок-схему программы (рис.I). Предложенная методика позволяет:

- априори отсекать вершины физически нереализуемых вариантов обслуживания;
- исключить по ходу дела вершину, не удовлетворяющую условиям или ограничениям;
- формировать и запоминать вариант обслуживания N клиентов с помощью одного натурального числа.

К недостаткам алгоритма следует отнести возрастание объема вычислений при больших N. В связи с этим рекомендуется использовать алгоритм I для $N < 5$. Большее число клиентов можно обслужить последовательно, выделяя по 3-4 клиента по некоторому приоритету. Основанием такой рекомендации служит быстрота счета в контрольных примерах оптимальных вариантов обслуживания при $N < 5$.

4. Алгоритм 2.

При создании следующего алгоритма сделана попытка для $N \geq 5$, сохранив достоинства алгоритма I, исключить некоторые недостатки, например, большой перебор возможных вариантов, а также многократный пересчет веса отрезков N -цепи, повторяющихся при обслуживании.

Для этого предполагается использовать память ЭВМ: во-первых, запоминать неудачные (в смысле суммарных затрат) отрезки N -цепи о том, чтобы исключить из рассмотрения N -цепи с такими отрезками; во-вторых, запоминать стоимости переходов в позиции p_ℓ , $\ell \in \overline{1,N}$, а также сами позиции. Это позволит снизить размерность задачи на единицу.

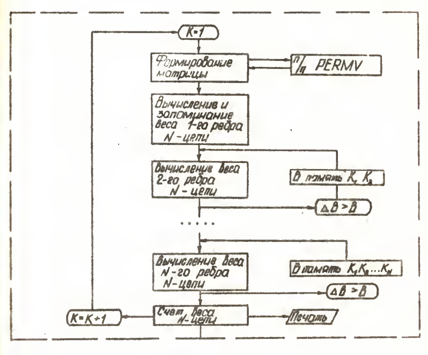


Рис. 2. Блок Б

Основные изменения внесены в БЛОК А блок-схемы (рис. I) и состоят в следующем:

- вес N -цепи считается по мере ее формирования;
- при невозможности перехода из вершин K_i в вершину K_{i+1} запоминается отрезок N -цепи $K_1, K_2, \dots, K_i, K_{i+1}$;
- создан блок априорной отсечки вариантов, реализовать кото-

рые невозможно либо по определению матрицы $\mathcal{Y}_K$ $(K \in \overline{1,N!})$ либо по другим соображениям.

Приведем БЛОК Б, который в алгоритме 2 заменит БЛОК А блок-схемы программы (рис.2).

Алгоритм 2 реализован в программе *OMAR* . Использованы стандартные комбинаторные программы *PERMU* , *SORTZV*.

Параметры ввода:

- *MA* – число клиентов;
- *KD* – максимальное число вершин матрицы $\mathcal{Y}$;
- *B* – ограничение на затраты по обслуживанию;
- $P_1,\dots,P_N$ – позиции клиентов;
- *TO* – начальный момент обслуживания;
- *T* – конечный момент обслуживания.

Параметры вывода:

- *IA (N)* – номера столбцов матрицы $\mathcal{Y}$ $(N \in \overline{1,MA})$;
- *YS* – суммарные затраты на обслуживание;
- *M1,...,MMA* – оптимальный вариант обслуживания.

1. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М., 1984. 382 с.

2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М., 1966. 276 с.

УДК 517.977

В.П.Серов (Уральский политехнический институт)

К ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ОТКЛОНЕНИЙ

Для собственно линейной системы рассматривается задача программного управления на минимум системы рассогласований. Задача на экстремум в функциональном пространстве сводится к конечномерным экстремальным процедурам на ЭВМ. Используемые конструкции математического программирования следуют подходу [1], предполагающему совместное исследование пары экстремальных задач, находящихся в двойственности. Работа относится к кругу задач, рассмотренных в [2, 3] .

1. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + G(t,u) + B(t)\sum_{s=1}^{\kappa} d_s \delta(t-t_s),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$x \in R^n,\ u \in P,\ d_s \in R^p,\ t \in T = [t_0, \vartheta].$$

Здесь x – фазовый вектор; P – ограниченное замкнутое множество из R^ℓ; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $n \times n$ – матрица $A(t)$ и $n \times p$ –матрица $B(t)$ непрерывны; вектор-функция $G(\cdot,\cdot): R \times P \to R^n$ непрерывна по t, u. Для определенности считаем $x(t)$ непрерывной слева в точках $t_s,\ s \in \overline{1,\kappa}$. Назовем множеством всех допустимых программных управлений U множество всех измеримых (по Лебегу) функций $U: T \to P$.

Моменты t_s подачи импульсов $d_s\ (s \in \overline{1,\kappa})$ пронумеруем в порядке их возрастания

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_\kappa \leq \vartheta; \tag{1.2}$$

суммарный ресурс импульсного управления равен $\mu > 0$:

$$\sum_{s=1}^{\kappa} \| d_s \| \leq \mu \tag{1.3}$$

($\|\cdot\|$ – евклидова норма). Движение $x(t),\ t \in T$ системы (1.1) из начальной позиции (t_0, x_0) определяется формулой Коши

$$x(t) = X[t,t_0]x_0 + \int_{t_0}^{t} X[t,\xi]G(\xi, U(\xi))d\xi + \sum_{s:t_s<t} X[t,t_s]B(t_s)d_s,$$

где $X[t,\tau]$ – фундаментальная матрица-функция решений системы $\dot{x} = A(t)x$.

Пусть задана система непустых выпуклых компактов $M_i\ (i \in \overline{1,m})$ из R^n и, кроме того,

$$Z \triangleq \{ d \in R^{p\kappa} \mid \sum_{i=1}^{\kappa} \|d_i\| \leq \mu,\ d_i \in R^p,\ i \in \overline{1,\kappa} \},$$

$$\mathcal{T} \triangleq \{ \tau \in R^m \mid t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_m \leq \vartheta \}.$$

2. В этом пункте рассмотрим задачу на минимум взвешенной суммы расстояний от траектории системы до множеств M_i, т.е.

качество управления будем оценивать функционалом

$$\gamma(\tau, U, d, \rho) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d\left(D_i x(\tau_i), M_i\right), \qquad (2.1)$$

где D_i $(i \in \overline{1,m})$ – заданные $h \times n$ -матрицы; $\alpha_i > 0$ $(i \in \overline{1,m})$ – заданные числа; $d' = (d_1', \ldots, d_\kappa')$; символом $d(y, M)$ обозначено евклидово расстояние от точки y до множества M. Пусть Y – множество векторов $\rho' = (t_1, \ldots, t_\kappa)$, координаты которых удовлетворяют условию (I.2).

<u>Задача 2.I</u>. При фиксированных $\tau \in T$, $\rho \in Y$ вычислить

$$\varepsilon(\tau, \rho) = \inf\left\{\gamma(\tau, U, d, \rho) \mid (U, d) \in U \times Z\right\}.$$

Пусть L^m – множество всех векторов-строк Λ таких, что

$$\Lambda = (\Lambda(1), \ldots, \Lambda(m)), \|\Lambda(i)\| \leq 1, \ \Lambda'(i) \in R^h, \ i \in \overline{1,m}.$$

С помощью соотношений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i d(y_i, M_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \max_{\|\ell\| \leq 1} \left\{\ell' y_i - \rho(\ell \mid M_i)\right\} =$$

$$= \max_{\Lambda \in L^m} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\Lambda(i) y_i - \rho\left(\Lambda(i) \mid M_i\right)\right]$$

получаем для величины (2.I) выражение

$$\gamma(\tau, U, d, \rho) = \max\left\{\omega(\alpha, \Lambda, \tau, U, d, \rho) \mid \Lambda \in L^m\right\},$$

где

$$\omega(\alpha, \Lambda, \tau, U, d, \rho) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\Lambda(i) D_i x(\tau_i) - \rho\left(\Lambda(i) \mid M_i\right)\right], \qquad (2.2)$$

$$x(\tau_i) = X[\tau_i, t_0] x_0 + \int_{t_0}^{\tau_i} X[\tau_i, \xi] G(\xi, U(\xi)) d\xi + \sum_{s \in N(i)} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s,$$

$$N(i) = \{s \in \overline{1,m} \mid t_s < \tau_i\}. \qquad (2.3)$$

Аналогично [2] имеет место равенство

$$\gamma(\tau, d, \rho) = \inf\left\{\gamma(\tau, U, d, \rho) \mid U \in U\right\} =$$

$$= \max_{\Lambda \in L^m} \left\{ R(\alpha, \Lambda, \tau) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i \sum_{s \in N(i)} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s \right\}, \qquad (2.4)$$

где

$$R(\alpha, \Lambda, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\Lambda(i) D_i X[\tau_i, t_0] x_0 - \rho(\Lambda(i) | M_i) \right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \min_{u \in P} \left(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i X[\tau_i, \xi] G(\xi, u) \right) d\xi .$$

Функция в фигурных скобках в (2.4) выпукло-вогнута по (d, Λ), поэтому по теореме о минимаксе [4] :

$$\varepsilon(\tau, \eta) = \min \{ \gamma(\tau, d, \eta) | d \in Z \} = \max_{\Lambda \in L^m} \{ R(\alpha, \Lambda, \tau) +$$
$$+ \min_{d \in Z} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i \sum_{s \in N(i)} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s \}. \qquad (2.5)$$

Пусть теперь $K = m$ и, кроме того, моменты подачи импульсов удовлетворяют условиям $t_s \in [\tau_{s-1}, \tau_s)$, $s \in \overline{1,m}$. Зафиксируем вектор $\tau \in T$ и определим множество ($\eta' = (t_1, \ldots$ $\ldots, t_m)$)

$$Y_\tau \triangleq \{ \eta \in R^m | \tau_{s-1} \le t_s \le \tau_s , \; s \in \overline{1,m} \}.$$

Тогда

$$\sum_{s \in N(i)} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s = \sum_{s=1}^{i} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s . \qquad (2.6)$$

Учитывая равенство $\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{i} a_{is} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} a_{is}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i \sum_{s=1}^{i} X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s =$$
$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s . \qquad (2.7)$$

Из (2.5)-(2.7) вытекает справедливость равенства

$$\varepsilon(\tau, \eta) = \max_{\Lambda \in L^m} \{ R(\alpha, \Lambda, \tau) -$$
$$- \mu \max_{s \in \overline{1,m}} \| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) \| \}. \qquad (2.8)$$

Перейдем теперь к нахождению оптимального управления U^0 . При этом предполагаем, что inf по U из U в задаче

2.I достигается. В противном случае следует расширить класс допустимых управлений до обобщенных управлений-мер [5, 6] ; в этом классе управлений наша задача на минимум всегда имеет решение, и оптимальное обобщенное управление удовлетворяет соответствующей модификации принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Справедлива (при фиксированных $\tau \in T$, $\rho \in Y_\tau$) следующая теорема.

Теорема 2.I. (принцип максимума). Если $(U^\circ, d^\circ) \in U \times Z$ – оптимальное решение в задаче 2.I, а Λ° – вектор, доставляющий максимум в (2.8), то

а) для любого $s \in \overline{1,m}$ почти всюду на $[\tau_{s-1}, \tau_s)$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t] G(t, U^\circ(t)) = \min_{u \in P} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t] G(t, u) ;$$

$$б) \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s^\circ = -\mu \max_{s \in \overline{1,m}} \left\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) \right\| .$$

Задача 2.2. При фиксированном $\tau \in T$ вычислить $\varepsilon(\tau) = \inf\{\varepsilon(\tau, \rho) | \rho \in Y_\tau\}$.

Задача 2.3. Вычислить $\varepsilon^\circ = \inf\{\varepsilon(\tau) | \tau \in T\}$.

Ниже, в п.4, задача 2.3 нахождения оптимального вектора τ° решена для случая так называемых "простых" движений.

3. В этом пункте качество управления будем оценивать степенью максимального отклонения траектории системы от множеств M_i . А именно, будем минимизировать функционал

$$\tilde{\gamma}(\tau, U, d, \rho) = \max_{i \in \overline{1,m}} d(D_i x(\tau_i), M_i).$$

Имеет место равенство

$$\tilde{\gamma}(\tau, U, d, \rho) = \max_{\Lambda \in L^m} \max_{\alpha \in S} \omega(\alpha, \Lambda, \tau, U, d, \rho),$$

где ω задается соотношениями (2.2), (2.3), а

$$S \triangleq \{\alpha \in R^m | \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Пусть $\kappa = m$ и $t_s \in [\tau_{s-1}, \tau_s]$, $s \in \overline{1,m}$.

Задача 3.I. При фиксированных $\tau \in T$, $\rho \in Y_\tau$ вычислить

$$\tilde{\varepsilon}(\tau,\rho) = \inf\{\tilde{\gamma}(\tau, U, d, \rho) | (U, d) \in U \times Z\}.$$

Задача 3.2. При фиксированном $\tau \in T$ вычислить

$$\varepsilon(\tau) = \inf\{\tilde{\varepsilon}(\tau,\rho) | \rho \in Y_\tau\}.$$

Задача 3.3. Вычислить $\hat{\varepsilon}^\circ = \inf\{\varepsilon(\tau) | \tau \in T\}$.

Справедливо следующее равенство (см. [7]):

$$\tilde{\varepsilon}(\tau, \rho) = \max_{\Lambda \in L^m} \max_{\alpha \in S} \{R(\alpha, \Lambda, \tau) - \tag{3.I}$$

$$- \mu \max_{s \in \overline{1,m}} \| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) \| \}.$$

Как и в п.2, предполагаем, что $\inf$ по U из U в задаче 3.I достигается.

Теорема 3.I (принцип максимума). Если $(U^\circ, d^\circ) \in U \times Z$ - оптимальное решение в задаче 3.I, а α°, Λ° - векторы, доставляющие максимум в (3.I), то справедливо следующее утверждение:

а) для любого $s \in \overline{1,m}$ почти всюду на $[\tau_{s-1}, \tau_s)$ выполняется соотношение:

$$\sum_{i=s}^{m} \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t] G(t, U^\circ(t)) =$$

$$= \min_{u \in P} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t] G(t, u);$$

б) $$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s^\circ =$$

$$= -\mu \max_{s \in \overline{1,m}} \| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) D_i X[\tau_i, t_s] B(t_s) \|.$$

4. Рассмотрим решение задач 3.I - 3.3 для случая "простых" движений. Система (I.I) имеет вид:

$$\dot{x} = u + B \sum_{s=1}^{m} d_s \delta(t - t_s), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.I}$$

$u \in P, d \in Z$; матрица B постоянна. Отметим, что для системы (4.I) s - й импульс можно подавать в любой момент времени $t_s \in [\tau_{s-1}, \tau_s)$ - вектор (2.3) при этом не меняется, так что задача 2.4 в данном случае вырождается: $\varepsilon(\tau, \eta) \equiv \varepsilon(\tau)$.

Функция $\varepsilon(\tau)$ согласно (2.8) имеет вид $\varepsilon(\tau) = \max\{\Omega(\tau, \Lambda) | \Lambda \in L^m\}$, где

$$\Omega(\tau,\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\Lambda(i) D_i x_0 - \rho(\Lambda(i) | M_i)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (\tau_j - \tau_{j-1}) \min_{u \in P} \left(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i u\right) - \mu \max_{s \in \overline{1,m}} \left\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i B \right\|.$$

Пусть

$$\Delta = \{\delta \in R^m \mid \delta_i \geq 0,\ i \in \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} \delta_i \leq \vartheta - t_0\}.$$

Тогда $(x \in R^m)$

$$\min_{\tau \in T} \sum_{j=1}^{m} (\tau_j - \tau_{j-1}) x_j = \min_{\delta \in \Delta} \delta' x = (\vartheta - t_0) \min_{i \in \overline{1,m}} x_i .$$

Функция $\Omega(\tau, \Lambda)$ линейна по τ и вогнута по Λ ; множества T и L^m - выпуклые компакты, поэтому

$$\varepsilon^0 = \min_{\tau \in T} \max_{\Lambda \in L^m} \Omega(\tau, \Lambda) = \max_{\Lambda \in L^m} \min_{\tau \in T} \Omega(\tau, \Lambda) =$$

$$= \max_{\Lambda \in L^m} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\Lambda(i) D_i x_0 - \rho(\Lambda(i) | M_i)\right] + \tag{4.2}$$

$$+ (\vartheta - t_0) \min_{j \in \overline{1,m}} \left(\min_{u \in P} \sum_{i=j}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i u \right) - \mu \max_{s \in \overline{1,m}} \left\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i B \right\| \Big\}.$$

Пусть

$$T_* = \{\tau \in T | \varepsilon(\tau) = \varepsilon^0\},\quad L_* = \{\Lambda \in L^m | \min_{\tau \in T} \Omega(\tau, \Lambda) = \varepsilon^0\}.$$

Множества T_* , L_* непусты в силу замкнутости T, L^m и непрерывности $\Omega(\cdot, \cdot)$.

<u>Теорема 4.I</u>. Пусть $\tau^0 \in T_*$ - оптимальное решение в задаче 2.3; (U^0, d^0) - оптимальное решение в задаче 2.I (при $\tau = \tau^0$); $\Lambda^0 \in L_*$. Тогда

а) для любого $s \in \overline{1,m}$ почти всюду на $[\tau^{\circ}_{s-1}, \tau^{\circ}_{s})$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^{\circ}(i) D_i U^{\circ}(t) = \min_{u \in P} \left(\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^{\circ}(i) D_i u \right);$$

б) вектор d° удовлетворяет условию

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^{\circ}(i) D_i B d^{\circ}_s = -\mu \max_{s \in \overline{1,m}} \left\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda^{\circ}(i) D_i B \right\|;$$

в) координаты вектора τ° удовлетворяют условиям $\tau^{\circ}_s = \tau^{\circ}_{s-1} + \delta^{\circ}_s$, $s \in \overline{1,m}$, где $\tau^{\circ}_0 = \tau_0$, а вектор δ° находится из условия $\delta'(\Lambda^{\circ})\delta^{\circ} = \min_{\delta \in \Delta} \delta'(\Lambda^{\circ})\delta$, где $\delta_s(\Lambda) = \min_{u \in P}(\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) D_i u)$, $s \in \overline{1,m}$.

Таким образом, схема решения заключается в следующем. Из (4.2) находим Λ°, затем по Λ° находим необходимые условия для U° и d°, далее находим вектор $\delta(\Lambda^{\circ})$, потом по $\delta(\Lambda^{\circ})$ находим вектор δ° и, наконец, по δ° находим τ°. Как и в [2], имеет место следующее условие выравнивания.

Теорема 4.2. Пусть существует невырожденный вектор $\tau^{\circ} \in T_*$, т.е. вектор, координаты которого удовлетворяют соотношениям $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < \vartheta$. Тогда для любых $\Lambda^{\circ} \in L_*$, $k \in \overline{1,m}$, $s \in \overline{1,m}$ справедливо равенство $\delta_k(\Lambda^{\circ}) = \delta_s(\Lambda^{\circ})$.

5. Применим вышеизложенную теорию для решения прикладной задачи из области медицины. А именно, рассмотрим задачу выбора оптимального режима дозирования лекарственного препарата (л.п.) в организме больного. Пусть $c(t)$ – концентрация л.п. в организме, который представлен n -камерной фармакокинетической моделью (см., например, [8 - 26]). Производится непрерывное и импульсное введение л.п. о целью создания его нужной концентрации. Поскольку мы лекарство только вводим, то на скорость введения и разовые дозы л.п. сразу следует ограничение: они неотрицательны. Время выведения инъекции или таблетки из организма на несколько порядков выше времени их поступления в организм, поэтому для описания введения разовых доз л.п. в уравнении модели процесса можно применить δ -функции. Кинетику всех процессов переноса и элиминации л.п. предполагаем линейной относительно $c(t)$.

Скорость изменения $(\dot{c}_i(t))$ концентрации л.п. в i -й камере описывается уравнением $(i \in \overline{1,n})$

$$\dot{c}_i(t) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t)c_i(t) + \sum_{\kappa=1, \kappa\neq i}^{n} a_{\kappa i}(t)c_\kappa(t) - k_i(t)c_i(t) + g_i(t)u_i(t) + b_i(t)\sum_{s=1}^{m} d_{si}\delta(t-t_s),\ c_i(t_0) = c_{0i}\ , \tag{5.1}$$

где $a_{ij}(t) \geq 0, ((i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}\ , i \neq j)$ – коэффициент скорости переноса л.п. из i – й камеры в j – ю; $k_i(t) \geq 0\ (t > t_0, i \in \overline{1,n})$ - коэффициент скорости элиминации (т.е. выведения л.п. из i – й камеры во внешнюю среду за пределы n -камерной модели) для i – й камеры; $g_i(t) \geq 0,\ b_i(t) \geq 0\ (i \in \overline{1,n});\ d_s' = (d_{s1}, \ldots, d_{sn})$. Все скалярные функции a_{ij}, k_i, g_i, b_i непрерывны. Отметим, что в общем случае $a_{ij} \neq a_{ji}$. Таким образом, л.п. в i -ю камеру вводится непрерывно со скоростью $g_i(t)u_i(t)$ и разовыми дозами $b_i(t_s)d_{si}$ в моменты времени t_s. Отрезок времени, в течение которого вводится л.п., фиксирован. Число инъекций m также задано, а моменты инъекций $t_1, \ldots, t_m$ и величины доз $d_1, \ldots, d_m$ могут выбираться. Обозначим

$$a_{ii}(t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t) \geq 0 \qquad (i \in \overline{1,n});$$

$$c'(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t)),\ k'(t) = (k_1(t), \ldots, k_n(t));$$

$$g'(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)),\ b'(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t));$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & -a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & -a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Тогда система (5.1) запишется в виде

$$\dot{c}(t) = (A(t) - Ek(t))c(t) + G(t)u(t) + B(t)\sum_{s=1}^{m} d_s\delta(t-t_s),\ c(t_0) = c_0\ , \tag{5.2}$$

где E - единичная $n \times n$ -матрица; $G(t) = diag\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$; $B(t) = diag\{b_1(t), \ldots, b_n(t)\}$. Убедимся в том, что модель сохраняет физическое свойство исходной реальной системы (организма), заключающееся в неотрицательности $c(t)$. Известно, что условие $n_{ij}(t) \geq 0$ $(i \neq j)$ является достаточным для неотрицательности решения $x(t)$, $t \geq t_0$, уравнения $\dot{x}(t) = N(t)x(t)$, $x(t_0) \geq 0$ ($n_{ij}(t)$ - элементы $n \times n$ -матрицы $N(t)$). Отсюда с учетом неотрицательности координат векторов $g(t)$, $b(t)$, $u(t)$, d_s , c_0 вытекает, что решения уравнения (5.2) неотрицательны при любом выборе $c_0 \geq 0$ и допустимых управлений $u(t)$, d_s . Вид матрицы $(A(t) - Ek(t))$ (в частности, число и расположение ее нулевых элементов) определяется, очевидно, структурой данной n -камерной модели.

Ограничения сверху $u(t) \in P$, $d \in Z$, где

$$P = \{u \in R^m \mid 0 \leq u_i \leq \nu_i \ , \ i \in \overline{1,n}\};$$

$$Z = \{d \in R^{mn} \mid \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{si} \leq \mu \ , \ d_{si} \geq 0\},$$

на скорость введения л.п. и на величины доз обусловлены соображениями клинической практики и имеют своей целью оградить организм от нежелательных побочных явлений.

Ущерб от отклонения реальной концентрации $c(t)$ от желательной будем измерять функционалом (см.п.3)

$$\tilde{\gamma}(t, U, d, \rho) = \max_{i \in \overline{1,m}} \| c(\tau_i) - m_i \| ,$$

где $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_m \leq \vartheta$ - заданные моменты времени; координаты векторов m_i $(i \in \overline{1,m})$ неотрицательны. Таким образом, желательный уровень $c(t)$ задается величинами $m_1, \ldots, m_m$ в моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Если, например, $m_j = 0$, то это означает желательность того, чтобы в момент времени τ_j л.п. вообще не было в организме, а если i - я координата вектора m_j равна нулю, то в момент τ_j л.п. не должно быть в i -й камере. Имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(t) X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b(t_j) \sum_{i=s}^{m} a_{isj} d_{sj} , \quad (5.3)$$

где a_{isj} $(j \in \overline{1,n})$ – координаты вектора-строки $a_{is} = \alpha_i \Lambda(i) X[\tau_{i_n}, t_s]$.

Из (5.3) следует равенство

$$\min_{d \in Z} \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} \alpha_i \Lambda(i) X[\tau_i, t_s] B(t_s) d_s = \mu \min_{(s,j) \in \overline{1,m} \times \overline{1,n}} \left(b(t_j) \sum_{i=s}^{m} a_{isj} \right).$$

Функция (3.I) имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}(\tau, \rho, c_0) = \max_{\Lambda \in L^m} \max_{\alpha \in S} \varkappa(\alpha, \Lambda, \tau, \rho, c_0), \qquad (5.4)$$

где

$$\varkappa(\alpha, \Lambda, \tau, \rho, c_0) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) \left[X[\tau_i, t_0] c_0 - m_i \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \sum_{k=1}^{n} \nu_k \min\{0; g_k(\xi) q_{jk}(\xi)\} d\xi + \mu \min_{(s,j) \in \overline{1,m} \times \overline{1,n}} \left(b(t_j) \sum_{i=s}^{m} a_{isj} \right);$$

вектор-строка $q_j(\xi) = (q_{j1}(\xi), \cdots, q_{jn}(\xi))$ определяется равенством

$$q_j(\xi) = \sum_{i=j}^{m} \alpha_i \Lambda(i) X[\tau_i, \xi], \quad j \in \overline{1,m}.$$

Условия, которым удовлетворяет оптимальный режим лекарственной терапии U°, d° запишутся согласно теореме 3.I:

а) для любого $s \in \overline{1,m}$ почти всюду на $[\tau_{s-1}, \tau_s)$ выполняются соотношения $(k \in \overline{1,n})$:

$$g_k(t) q_{sk}(t) U_k^\circ(t) = \nu_k(t) \min\{0; g_k(t) q_{sk}(t)\},$$

где $q_s(t) = \sum_{i=s}^{m} \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) X[\tau_i, t]$;

б) вектор d° удовлетворяет условию

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=s}^{m} a_{is}^\circ B(t_s) d_s^\circ = \mu \min_{(s,j) \in \overline{1,m} \times \overline{1,n}} \left(b(t_j) \sum_{i=s}^{m} a_{isj}^\circ \right),$$

где $a_{is}^\circ = \alpha_i^\circ \Lambda^\circ(i) X[\tau_i, t_s]$.

Аналогичные соотношения можно получить и для случая, когда эффективность терапии оценивается величиной (см.п.2) $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| x(\tau_i) - m_i \|$. При этом функция (2.6) имеет вид

$$\varepsilon(\tau, \rho, c_0) = \max_{\Lambda \in L^m} \varkappa(\alpha, \Lambda, \tau, \rho, c_0). \qquad (5.5)$$

В (5.4), (5.5) величина c_0 введена в состав переменных функций значения задач 2.I и 3.I, поскольку на результат задачи установления нужной концентрации л.п. можно влиять и выбором начальной концентрации c_0 (т.е. выбором c_{0i} $(i \in \overline{1,n})$ во всех камерах). В связи с этим возникает следующая задача: Пусть мы имеем возможность варьировать c_0 в некоторых пределах: $c_0 \in C^0$, где C^0 – непустой выпуклый компакт, содержащийся в неотрицательном ортанте пространства R^n.

Задача 5.I. Найти (при фиксированных τ, η) вектор c_0^0, доставляющий равенство $\varepsilon(\tau, \eta, c_0^0) = \min\{\varepsilon(\tau, \eta, c_0) | c_0 \in C^0\}$.

Задача 5.2. Найти (при фиксированных τ, η) вектор c_0^0, доставляющий равенство $\tilde{\varepsilon}(\tau, \eta, c_0^0) = \min\{\tilde{\varepsilon}(\tau, \eta, c_0) | c_0 \in C^0\}$.

Отметим, что функции $\varepsilon(\tau, \eta, c_0)$ и $\tilde{\varepsilon}(\tau, \eta, c_0)$ выпуклы по c_0 и достигают своего минимума на компакте C^0.

Рассмотрим решение задачи 5.I. Функция $\mathscr{X}$ вогнута по Λ и линейна по c_0, поэтому по теореме о минимаксе получаем:

$$\min_{c_0 \in C^0} \varepsilon(\tau, \eta, c_0) = \min_{c_0 \in C^0} \max_{\Lambda \in L^m} \mathscr{X}(\alpha, \Lambda, \tau, \eta, c_0) =$$

$$= \max\{\mathscr{X}_1(\alpha, \Lambda, \tau, \eta) | \Lambda \in L^m\}, \tag{5.6}$$

$$\mathscr{X}_1(\alpha, \Lambda, \tau, \eta) = -g(-y | C^0) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) m_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \min\{0; g_k(\xi) q_{jk}(\xi)\} d\xi + \mu \min_{(s,j) \in \overline{1,m} \times \overline{1,n}} (B(t_j) \sum_{i=s}^{m} a_{isj}), \tag{5.7}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Lambda(i) X[\tau_i, t_0]. \tag{5.8}$$

Отсюда находим условие, которому удовлетворяет c_0^0:

$$y c_0^0 = \min\{y c_0 | c_0 \in C^0\}, \tag{5.9}$$

где вектор y задается равенством (5.8) при $\Lambda = \Lambda^0$, а Λ^0 – вектор, на котором достигается максимум в (5.6).

Обратимся теперь к решению задачи 5.2. Функция ω (2.2), (2.3) для системы (5.2) линейна по переменной $v = (U, d, c_0) \in U \times 2 \times C^0$. Можно показать справедливость равенства

$$\tilde{\varepsilon}(\tau, \eta) = \max_{\Lambda \in L^m} \max_{\alpha \in S} \mathscr{X}_1(\alpha, \Lambda, \tau, \eta), \tag{5.10}$$

где $\mathscr{X}_1(\alpha, \Lambda, \tau, \eta)$ задается (5.7). Оптимальная начальная концентрация c_0^0 удовлетворяет условиям (5.9), (5.8) при

$\alpha = \alpha^{\circ}$, $\Lambda = \Lambda^{\circ}$, где α°, Λ° – векторы, на которых достигается максимум в (5.10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. 476 с.

2. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика. 1986. № 1. С.59-64.

3. Сесекин А.Н., Ченцов А.Г. Об оптимальном осуществлении заданных движений линейной дискретной системой с ограниченными ресурсами // Автом.и телемех. 1986. № 6. С.56-61.

4. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры. М., 1963. С.31-39.

5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981. 288 с.

6. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси, 1977. 200 с.

7. Серов В.П. Об одной задаче управления на минимум системы рассогласований / Урал.политехн.ин-т. Свердловск, 1987. Деп. в ВИНИТИ, 2.09.1987, № 6435-В87. 17 с.

8. Беллман Р. Математические методы в медицине. М., 1987. 200 с.

9. *Jacquez J.A. Compartmental analysis in biology and medicine. Elsevier. Amsterdam. 1972.*

10. *Brown R.F. Biomedical systems analysis via comprotmental consept. Cambridge (Mass.). Abacus Press. 1985. 684 p.*

11. *Godfrey K. Compartmental models and their application. Acad. Press. London. 1983.*

12. *Anderson D.H. Compartmental modeling and tracer kinetics. Springer. Berlin. 1983.*

13. *Atkins G.L. Multicompartmental models for biological systems. Methuen. London. 1969.*

14. *Wagner J.G. Fundamentals of clinical pharmacokinetics. Hamilton. Ill. 1973.*

15. *The Bellman continuum. A collection of the works of Richard E. Bellman / Ed. By Robert S. Roth. World Scientific. Singapore. 1986. 868 p.*

16. Соловьев В.Н., Фирсов А.А., Филов В.А. Фармакокинетика. М., 1980. 423 с.

17. Холодов Л.Е., Яковлев В.П. Клиническая фармакокинетика. М., 1985. 463 с.

18. Математические модели в иммунологии и медицине // Матер.междунар.конф. ИФИП. Москве, июль 1982. М., 1986. 310 с.

19. Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. М., 1978. 320 с.

20. Байцосов В.А., Ворошилин С.Е., Рогаткин А.Н. К вопросу об импульсном управлении выведением токсического металла из организма // Математическое моделирование процессов в медицинских и биологических системах. Свердловск, 1982. С.56-65.

21. Коньшева Л.К. Некоторые аспекты применения камерного моделирования в токсикокинетике // Математические модели в медицине и биологии. Свердловск, 1986. С.41-47.

22. *Cherruault Y., Prost J.F. New ideas for solving optimization problems related to optimal therapeutics // Kybernetes. 1986. Vol. 15, N 4. P. 257-262.*

23. *Li Qi. Optimal design of intravenous infusion by optimal control theory // Modell. Simul. and Contr. 1985. Vol. C2, N.4. P. 37-52.*

24. *Albisser A.M. Devices for the control of diabetes mellitus // Proc. IEEE. 1979. Vol. 67, N8. P. 1308-1320.*

25. *Sundareshan M.K., Fundakowski R.A. Stability and control of a class of compartmental systems with application to cell proliferation and cancer therapy // IEEE Trans. Autom. Control. - 1986. Vol. 31, N 11. P. 1022-1032.*

26. *Hacisalihzade S.S., Senning M.F., Stratz R., R.J.P. de Figueiredo. Optimization of drug administration By a Tayberian approach // IEEE Trans. Biomed. Eng. - 1987. Vol. 34, N6. P. 430-436.*

УДК 62.50

Г.И.Найфельд (Уральский политехнический институт)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Введение

При проектировании систем управления полетом принято выделять задачи синтеза внутренних и внешних контуров управления для продольного и бокового движения самолета. Критерии качества внутренних контуров традиционно формируются в виде требований к переходным процессам, расположению корней или виду частотных характеристик. Внешние контуры управления используются для реализации программных траекторий по отдельным составляющим вектора состояния: по углу тангажа и высоте в продольном канале и по углам крена и рыскания в боковом. Качество внешних контуров оценивается по точности отработки программных воздействий, отсутствию автоколебаний и т.д. Расчет законов управления обычно осуществляется частотными и корневыми методами, что объясняется простой физической интерпретацией этих методов.

В данной работе проектирование законов управления движением самолета осуществляется методами модального синтеза, что позволяет получить единообразную форму закона управления в виде наращиваемой по сложности структуры [I] . Для облегчения изложения методика проектирования рассмотрена на численном примере.

I. Математическая модель самолета

Пространственное движение самолета для фиксированного режима полета описывается системой уравнений [2] :

$$\dot{\alpha} = \omega_z - tg\beta * \omega_x - 0,667 * \alpha / \cos\beta - 0,11 * \delta_в / \cos\beta + 0,0473 * \cos\vartheta * \cos\gamma / \cos\beta;$$

$$\dot{\beta} = \omega_x * \sin\alpha + \omega_y * \cos\alpha + 0,0473 \cos\vartheta * \sin\gamma - 0,23 * \beta - 0,046 * \delta_н ;$$

$$\dot{\omega}_z = -0,49 * \omega_z - 4,8\alpha - 8,7 * \delta_в ; \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_x = -2,6 * \omega_x - 0,25 * \omega_y - 38,0 * \beta - 17,0 * \delta_э - 7,0 * \delta_н ;$$

$$\dot{\omega}_y = 0{,}075 * \omega_x - 0{,}27 * \omega_y - 4{,}4 * \beta + 0{,}82 * \delta_э - 3{,}2 * \delta_н \;;$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_y * \sin\gamma + \omega_z * \cos\gamma \;;$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - tg\vartheta * (\omega_y * \cos\gamma - \omega_z * \sin\gamma) \;; \qquad (2)$$

$$\dot{\psi} = (\omega_y * \cos\gamma - \omega_z * \sin\gamma)/\cos\vartheta \;;$$

$$\dot{H} = 207{,}2 * (\cos\alpha * \cos\beta * \cos\psi * \cos\vartheta + \sin\alpha * \cos\beta * (\cos\psi * \sin\vartheta *$$

$$* \cos\gamma + \sin\psi * \sin\gamma) + \sin\beta * (\cos\psi * \sin\vartheta * \sin\gamma + \sin\psi * \cos\gamma)).$$

Численные значения аэродинамических коэффициентов описывают самолет F-8 при $M = 0{,}6$, $H = 6000$ Ом [3] . В полный вектор состояния входят: α -угол атаки, β -угол скольжения, ω_x, ω_y, ω_z - угловые скорости, ϑ - угол тангажа, γ - угол крена, ψ - угол рыскания и высота полета H .

Приводы руля высоты, элеронов и руля направления имеют ограничения по положению:
$-26{,}0 < \delta_в < 6{,}0^0$; $|\delta_э| < 30{,}0^0$; $|\delta_н| < 6{,}0^0$.

Моделирование пространственного движения с помощью системы уравнений (I) не учитывает изменение скорости полета и аэро динамических коэффициентов при изменении составляющих вектора состояния. Модель органов управления не учитывает динамику приводов, ограничения скорости перемещения управляющих поверхностей и нелинейности типа "люфт" и "зона нечувствительности". Кроме того, считается, что все составляющие вектора состояния доступны для измерения и могут быть использованы в законе управления. Эти упрощения не имеют принципиального характера с точки зрения применимости методики синтеза законов управления.

2. Метод модального синтеза

При проектировании систем управления самолетом традиционно принято разделять продольное и боковое движение. Это разделение возможно, если перекрестные связи между продольным и боковым движением сравнительно малы. С точки зрения методики синтеза законов управления различия продольного и бокового ка-

налов управления определяются размерностью вектора управления и необходимость развязки движений в боковом канале управления.

Рассмотрим объект управления в виде

$$\dot{x} = A*x + B*u, \qquad (3)$$

где x - n-мерный вектор состояния, u - m-мерный вектор управления.

Управление u формируется в виде линейной комбинации командных сигналов и вектора состояния

$$U = -L*x + G*v. \qquad (4)$$

Матрица обратной связи рассчитывается с помощью соотношений [3] :

$$L = \mu * F^{-1}; \qquad A*F - F*J = B*\mu, \qquad (5)$$

где J - желаемая диагональная матрица собственных чисел замкнутой матрицы динамики S_i, $(i = 1, \dots, n)$; F - матрица собственных векторов замкнутой системы; μ - матрица вспомогательных векторов.

Задача линейного синтеза решается, если будут заданы матрицы J и F. Однако определение этих матриц не является очевидным даже при наличии требований к переходным процессам или виду частотных характеристик, которые обычно фигурируют в техническом задании на проектирование. Фактически, требования технического задания позволяют определить область на комплексной плоскости, в которой должны размещаться нули и полюса звена второго порядка, имеющего заданный вид переходных процессов. В реальной системе управления качество будет определяться не только обратной связью, но и степенью влияния нелинейностей исполнительных механизмов, ограничениями ресурса управления и т.д.

Как показано в [1] , матрица коэффициентов обратной связи для скалярного управления рассчитывается по формуле:

$$L = \sum \frac{d(\lambda_i)}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} * \frac{h_i^+}{h_i^+ * B} , \qquad (6)$$

где $d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - s_i)$ – желаемый характеристический многочлен A ; s_i – желаемые собственные числа замкнутой системы управления; $H^{-1} = (h_1^+, \dots, h_n^+)^T$ – матрица двойственных векторов; λ_i – собственные числа матрицы A . Очевидно, что минимальные значения коэффициентов обратной связи будут получены при перемещении корней λ_i матрицы A в точки s_i которые должны находиться на границе желаемой области размещения и быть ближайшими к λ_i .

Для систем, имеющих скалярное управление, линейная обратная связь позволяет разместить собственные числа замкнутой системы управления, т.е. удовлетворить требования к динамике переходных процессов. Для векторного управления может быть решена задача развязки движений по составляющим вектора состояния. В этом случае должны быть заданы собственные числа и собственные векторы замкнутой системы. Матрица собственных векторов может быть задана в виде

$$F = \begin{pmatrix} * \; . \; . \; * & 0 \; . \; . \; 0 & 0 \; . \; . \; 0 \\ 0 \; . \; . \; 0 & * \; . \; . \; * & 0 \; . \; . \; 0 \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ 0 \; . \; . \; 0 & 0 \; . \; . \; 0 & * \; . \; . \; * \\ [q_1] & [q_2] & [q_i] \end{pmatrix} = (f_1, \dots f_n), \qquad (7)$$

где q_i – количество корней, определяющих движение по координате x_i ; $*$ – произвольные числа.

Далее, из выражения

$$(\lambda_i * I - A)^{-1} * B * \mu_i = f_i \qquad (8)$$

определяются μ_i и рассчитывается матрица обратной связи L . Следует отметить, что полная развязка свободных движений возможна лишь при равенстве размерностей вектора состояния и вектора управления.

3. Внутренние контуры управления

Требования к качеству ручного управления формируются на основе анализа и формализации понятия "хороший самолет" в терминах теории автоматического управления [4] . Известны несколько критериев, нормирующих отдельные параметры системы управле-

ния, однако, принципиальным требованием является апериодический или слабоколебательный характер переходного процесса с заданным временем регулирования по наиболее важным для летчика координатам. В продольном канале такими координатами являются перегрузка и угол атаки, а в боковом – угол скольжения и угловая скорость крена.

Для расчета ручного управления используются уравнения:

$$\dot{\alpha} = \omega_z - 0{,}667 * \alpha - 0{,}11 * \delta_в \; ;$$

$$\dot{\omega}_z = -0{,}49 * \omega_z - 4{,}8 * \alpha - 8{,}7 * \delta_в \; ,$$

$$\dot{\omega}_x = -2{,}6 * \omega_x - 0{,}25 * \omega_y - 38{,}0 * \beta - 17{,}0 * \delta_э - 7{,}0 * \delta_н \; ;$$

$$\dot{\omega}_y = -0{,}075 * \omega_x - 0{,}27 * \omega_y - 4{,}4 * \beta + 0{,}82 * \delta_э - 3{,}2 * \delta_н \; ;$$

$$\beta = 0{,}078 * \omega_x + 0{,}997 * \omega_y - 0{,}23 * \beta - 0{,}046 * \delta_н \; .$$

Собственные значения матрицы динамики продольного канала: $\lambda_{1,2} = -0{,}58 \pm j\,2{,}2$. Переходный процесс разомкнутой системы по углу атаки имеет колебательный характер с перерегулированием 40% и временем регулирования, превышающим 5 с.

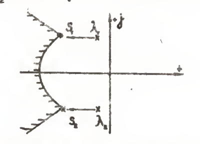


Рис. I. Желаемая область расположения корней системы ручного управления продольным каналом

Предположим, что желаемый переходный процесс должен иметь перерегулирование не более 10% и время регулирования не более I с. Эти требования определяют область желаемого расположения корней, представленную на рис. I.

Ближайшие к собственным значениям разомкнутой матрицы динамики точки этой области определяют желаемые корни замкнутой системы $s_{1,2} = -3{,}0 \pm j\,2{,}0$ и закон управления

$$\delta_в = 0{,}568 * \alpha + 0{,}549 * \omega_z + X_p \; ,$$

где X_p – сигнал датчика перемещения ручки летчика.

Разомкнутая матрица динамики бокового движения имеет три собственных значения: $\lambda_1 = -2{,}25$, $\lambda_{2,3} = -0{,}44 \pm j\,2{,}56$. При наличии двух органов управления [5] линейная обратная связь позволяет разместить собственные числа замкнутой системы в желаемой области и разделить свободное движение по ω_x от свободных движений по ω_y и β.

Предположим, что желаемая область размещения корней определяется соотношениями

$$s_1 \leq -3{,}5,\ s_{2,3} = -\xi * \omega \pm j\omega\sqrt{1-\xi^2},\ \omega \in [1{,}5],\ \xi \in [0{,}5\ ,\ 1],$$

которые определяют апериодический процесс с $T = 0{,}25$ по ω_x и слабоколебательные процессы с $T = 0{,}38$, $\xi = 0{,}52$ по ω_y, β.

Матрица собственных векторов замкнутой системы

$$F = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ f_1(s_1) & f_2(s_2) & f_3(s_3) \\ 0 & I & I \end{pmatrix}$$

где $f_1 \dots f_3$ – функции собственных значений $s_1 \dots s_3$.

Линейный закон управления, рассчитанный согласно [5]

$$\begin{bmatrix} \delta_э \\ \delta_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0496 & 0{,}257 & 2{,}26 \\ -0{,}0077 & -0{,}589 & -0{,}061 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_э \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $X_э$ – сигнал датчика отклонения ручки летчика.

4. Внешние контуры управления

В отличие от статических внутренних контуров внешние контуры управления проектируются астатическими, что позволяет реализовать отработку заданных значений и стабилизацию отдельных составляющих вектора состояния. При этом считается, что объект управления включает в себя ранее спроектированный контур, корни которого не требуют коррекции.

Типовая структура внешнего контура, включающая интегратор, нелинейные звенья, внутренний контур управления и обратные связи внешнего контура, представлена на рис.2. Величины ограничений

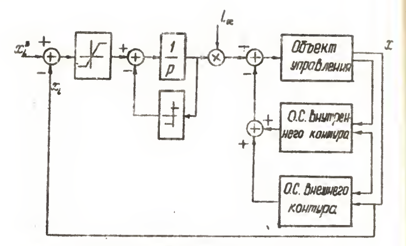


Рис.2. Структурная схема внешнего контура управления

определяются при численном моделировании процессов отработки больших входных воздействий. Следует отметить, что при таком подходе внешние контуры, относящиеся к одному каналу управления, оказываются несовместными. Так, например, нельзя совместить режимы стабилизации угла тангажа и высоты в продольном канале. В боковом канале несовместимы режимы стабилизации угла крена и угла рыскания.

Система уравнений, включающая интегратор и внутренний контур

$$\dot{\alpha} = 0{,}9395 * \omega_z - 0{,}7295 * \alpha - 0{,}11 * \delta_в \,;$$

$$\dot{\omega}_z = -5{,}27 * \omega_z - 9{,}744 * \alpha - 8{,}7 * \delta_в \,;$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z \,;$$

$$\dot{\varkappa} = \vartheta ,$$

где $\varkappa$ – переменная интегратора.

Желаемая динамика определяется корнями:

$s_{1,2} = -3{,}0 \pm j2{,}0, \quad s_3 = -0{,}85, \quad s_4 = -0{,}75$,

что приводит к строке коэффициентов обратной связи

$L = [1{,}035, \ -0{,}191, \ -2{,}064, \ -1{,}48]$

и ограничениям в интеграторе $|\dot{\varkappa}| \le 1$, $|\varkappa| \le 3$.

Расчет контура стабилизации высоты осуществляется с помощью системы уравнений

$$\dot{\alpha} = 0{,}9395*\omega_z - 0{,}7295*\alpha - 0{,}11*\delta_в;$$
$$\dot{\omega}_z = -5{,}27*\omega_z - 0{,}744*\alpha - 8{,}7*\delta_в;$$
$$\dot{\vartheta} = \omega_z;$$
$$\dot{H} = 207{,}0*\vartheta;$$
$$\dot{\varkappa} = H$$

Для размещения корней замкнутой матрицы динамики в точках $s_{1,2} = -3{,}0 \pm j2{,}0$, $s_3 = -0{,}45$, $s_4 = -0{,}35$, $s_5 = -0{,}3$ необходимы коэффициенты обратной связи:

$$L = [1{,}058,\ -0{,}14,\ -1{,}78,\ -0{,}0041,\ -0{,}00056].$$

Ограничения интегратора: $|\dot{\varkappa}| \leqslant 300{,}0$ м/с, $|\varkappa| \leqslant 40000{,}0$ м.

Для расчета контура стабилизации угла крена используется система уравнений

$$\dot{\omega}_x = -0{,}054*\omega_x - 0{,}43*\beta - 17{,}0*\delta_э;$$
$$\dot{\omega}_y = 0{,}031*\omega_x - 2{,}366*\omega_y - 6{,}445*\beta + 0{,}82*\delta_э;$$
$$\dot{\beta} = 0{,}0745*\omega_x + 0{,}97*\omega_y - 0{,}23*\beta;$$
$$\dot{\gamma} = \omega_x - 0{,}078*\omega_y;$$
$$\dot{\varkappa} = \gamma.$$

Желаемая динамика контура управления определяется корнями:

$$s_1 = -3{,}5,\quad s_{2,3} = -1{,}35 \pm j2{,}25,\quad s_4 = -1{,}25,\quad s_5 = -1{,}3.$$

Строка коэффициентов обратной связи:

$$L = [-0{,}166,\ -0{,}127,\ -0{,}283,\ -0{,}639,\ -0{,}342].$$

Ограничения интегратора составляют: $|\varkappa| \leqslant 1$, $|\dot{\varkappa}| \leqslant 3$.

Для расчета контура стабилизации угла рыскания используется система уравнений:

$$\dot{\omega}_x = -0{,}054*\omega_x - 0{,}43*\beta - 17{,}0*\delta_э;$$
$$\dot{\omega}_y = 0{,}031*\omega_x - 2{,}366*\omega_y - 6{,}445*\beta + 0{,}82*\delta_н;$$
$$\dot{\beta} = 0{,}0745*\omega_x + 0{,}97*\omega_y - 0{,}23*\beta;$$
$$\dot{\gamma} = \omega_x - 0{,}078*\omega_y;$$

$$\dot{\psi} = \omega_y ;$$
$$\dot{\varkappa} = \dot{\psi} .$$

Желаемая динамика определяется корнями:

$$s_1 = -3{,}5,\ s_{2,3} = -1{,}35 \pm j\,2{,}25,\ s_4 = -1{,}25,\ s_5 = -1{,}3,\ s_6 = -0{,}15.$$

Строка коэффициентов обратной связи:

$$L = [-0{,}153,\ 0{,}316,\ -7{,}71,\ -0{,}062,\ 8{,}32,\ 1{,}15] .$$

Ограничения интегратора составляют: $|\dot{\varkappa}| \leq 0{,}15$, $|\varkappa| \leq 40$.

Заключение

Рассмотрены примеры синтеза основных контуров управления движением самолета методом модального синтеза.

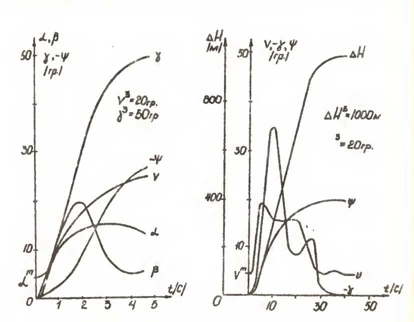


Рис.3. Совместная отработка входных воздействий в продольном и боковом каналах управления

Проверка качества управления проводилась путем численного решения системы уравнений (I) на ЭВМ "БЭСМ-6". Примеры процес-

сов отработки программных значений по углам крена, тангажа, рыскания и высоте представлены на рис.3.

Полученный опыт подтверждает возможность использования программного обеспечения метода модального синтеза для создания САПР систем управления движением самолета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Оботнин А.Н. Выбор желаемых собственных значений и векторов при синтезе линейных систем управления / Урал.политехн. ин-т. Свердловск, 1986. Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 1727. 53 с.
2. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М., 1983. 320 с.
3. *Elliott J.R. NASA's advanced Control Low Program for the F-8 digital Fly-By-wire Aircraft.-IEEE Transaction on Automatic Control, 1977. Vol. AC-22, N7. P. 753-757.*
4. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного бокового движения самолета. М. Машиностроение. 1979. 350 с.
5. Оботнин А.Н., Бройтман А.О. Метод модального синтеза закона управления боковым движением самолета. Урал.политехн. ин-т. Свердловск, 1984. Деп. в ЦНИИГА, 1985, № 346 ГА-85. 10с.

УДК 681.3 Е.Г.Беленький (ЦНИИГАиК)

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ

Решение систем нормальных уравнений является одним из наиболее трудоемких вычислительных процессов в уравнительных вычислениях, особенно при большом количестве определяемых параметров. При решении больших систем нормальных уравнений матрица системы, как правило, является разреженной. Для эффективной организации решения требуются разработка и применение специальных методов, алгоритмов и математического обеспечения, использующих структуру разреженной матрицы и минимизирующих количество вычислений и объем необходимой памяти. Эти вопросы являются весьма актуальными сегодня как в практике уравнительных вычислений, так и в развитии численных методов линейной алгебры.

Для решения систем нормальных уравнений большого порядка, возникающих при уравнивании геодезических и при аналитической блочной фототриангуляции, разработано математическое обеспечение, которое позволяет решать разреженные системы нормальных уравнений с матрицами профильной и профильно-блочной структуры как в оперативной памяти, так и при использовании внешней памяти на МЛ. Математическое обеспечение носит универсальный характер и может быть использовано при решении любых задач, приводящих к разреженным системам нормальных уравнений данной структуры.

Профильно-блочная структура матрицы выбрана в связи с тем, что это наиболее общая структура матрицы нормальных уравнений, которая возникает при уравнивании блокоаналитической фототриангуляции и геодезической сети с нерегулярной структурой. Отметим, что регулярная структура сети приводит к ленточно-блочной матрице, что является частным случаем профильной структуры. В математическом обеспечении предусмотрена возможность получения и сокращения профиля матрицы с помощью алгоритма локальной минимизации профиля [1] .

В дальнейшем будем предполагать, что в памяти ЭВМ хранится по строкам блок за блоком нижний треугольник матрицы нормальных уравнений, причем нулевые блоки вне профиля не хранятся и не участвуют в вычислениях.

Для решения системы

$$AX = B \qquad (1)$$

используется известный вариант метода Холецкого, модифицированный для обработки блоков, в котором выполняется треугольное разложение матрицы

$$A = LDL^{T}, \qquad (2)$$

где L - нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; D - диагональная матрица. Вектор решения определяется в результате последовательного решения систем

$$LZ = B, \quad DY = Z, \quad L^{T}X = Y, \qquad (3)$$

где решение первых двух систем реализует прямой ход, а последней - обратный ход. Для этого метода характерны высокая точность и устойчивость численного процесса. Алгоритм решения

системы при использовании внешней памяти и основные формулы приведены в [2].

При разработке математического обеспечения для решения разреженных систем нормальных уравнений для тестирования, оценки быстродействия алгоритма вычислений, оценки устойчивости метода решения необходимо уметь моделировать тестовые системы нормальных уравнений различного порядка, разреженности и обусловленности. Генератор тестовых задач является очень полезным инструментом при таких разработках [3].

Здесь будут изложены алгоритм и возможности генератора тестовых систем нормальных уравнений, даны некоторые оценки числа обусловленности матрицы, а также приведены результаты численного моделирования на ЭВМ.

Под тестовой системой нормальных уравнений будем понимать систему нормальных уравнений с известным решением. Обычно тестовые системы получают, исходя из решения модельных задач, приближенных к реальным. Однако для всестороннего тестирования математического обеспечения и анализа его эффективности, особенно, если математическое обеспечение имеет широкое назначение, наиболее целесообразным является непосредственное моделирование систем нормальных уравнений произвольного порядка, структуры и обусловленности.

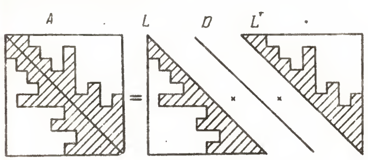


Рис.I. Треугольное разложение профильной матрицы

Такой подход используется в предлагаемом генераторе тестовых систем. Он позволяет получать в оперативной памяти ЭВМ системы нормальных уравнений с профильной и профильно-блочной,

а также с ленточной и ленточно-блочной структурами матриц различного порядка и обусловленности.

При моделировании тестовой системы (I) необходимо вычислить положительно определенную матрицу A заданной или моделируемой структуры и вектор правой части системы B. Матрицу A с заданным профилем можно получить из формулы (2), исходя из того, что структура профиля и ширина ленты у матрицы A и L одинаковы (рис.I). Задавая профиль (ширину ленты) матрицы L, а также элементы матриц L и D, можно вычислить матрицу A заданной структуры. Таким образом, алгоритм моделирования разреженных систем нормальных уравнений заключается в следующем.

I. Моделирование профиля матрицы

Если профиль или ширина ленты задаются, то этот пункт следует пропустить. При моделировании длина i-й строки профиля определяется по формуле

$$\ell_i = min\{\kappa_0(i-1)\varepsilon_i + 1, i\}, \quad (4)$$

где κ_0 – коэффициент разреженности матрицы; ε_i – псевдослучайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,I) ($\varepsilon_i \in R$ (0,I)). Уменьшение $\kappa_0 <$ I увеличивает разреженность матрицы. При $\kappa_0 \gg$ I моделируемая матрица нормальных уравнений будет заполненной.

С помощью формулы (4) определяется структурный массив профиля NPD:

$$NPD(1) = 1, \quad NPD(i) = NPD(i-1) + \ell_i, \quad (5)$$

где величина $NPD(i)$ указывает номер диагонального элемента i-й строки в одномерном массиве, в котором хранится профиль.

2. Моделирование треугольной матрицы L

Элементы ℓ_{ij} $(i > j)$ также моделируются с помощью датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением, причем определяются только элементы, лежащие в пределах профиля по формуле

$$\ell_{ij} = (b-a)\varepsilon_{ij} + a, \quad (6)$$

где b и a – заданные величины ($b > a$); $\varepsilon_{ij} \in R$ (0,I). Из (6) следует, что $\ell_{ij} \in R(a,b)$.

3. Моделирование диагональной матрицы D

Элементы d_i вычисляются по формуле

$$d_i = \varepsilon_i (d_n - d_1) + d_1 , \qquad (7)$$

где d_1, d_n – наименьший и наибольший элементы диагональной матрицы ($d_n \geq d_1 > 0$), $\varepsilon_i \in R(0,1)$, $d_i \in R(d_1, d_n)$.

4. Вычисление матрицы А по формуле (2)

5. Определение вектора правой части В

Вектор правой части вычислялся по формуле $B = AX_T$, где X_T – точный вектор решения, все элементы которого принимались равными I. По изложенному алгоритму разработан комплекс программ на языке ФОРТРАН-IУ, который реализует генератор тестовых систем, позволяющий моделировать профильные (ленточные), а также профильно (ленточно) – блочные системы нормальных уравнений с одинарной и двойной точностью.

Профиль матрицы может моделироваться по формулам (4) и (5) или задаваться непосредственно. При моделировании с одинарной точностью все вычисления выполняются с двойной точностью. В качестве датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением использовался датчик, рекомендуемый в [4].

Для исследования обусловленности получаемых систем нормальных уравнений и для определения интервалов моделирования матриц L и D для вычисления матрицы А заданной обусловленности был выполнен ряд численных экспериментов. Прежде чем перейти к изложению результатов, рассмотрим некоторые оценки обусловленности системы нормальных уравнений. Количественной мерой обусловленности систем нормальных уравнений является число обусловленности матрицы А

$$k(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \lambda_1 / \lambda_n , \qquad (8)$$

где λ_1 и λ_n – соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы А. Однако вычисление $k(A)$ по формуле (8) требует значительных вычислительных затрат, поэтому

для определения величины $k(A)$ использовались более "дешевые" оценки. Хорошей оценкой $k(A)$ является следующая величина:

$$k_1(A) = a_{max}\,\tilde{a}_{max} \le k(A), \qquad (9)$$

где a_{max} и $\tilde{a}_{max}$ максимальные диагональные элементы матриц A и A^{-1} соответственно.

Для другой оценки $k(A)$ введем следующие определения. Относительной точностью решения системы будем называть величину

$$\rho = \| A\hat{X} - B \| / \|B\|, \qquad (10)$$

где $\hat{X}$ – вектор неизвестных, полученный в результате решения системы. Относительной ошибкой решения будем называть величину

$$\eta = \| \hat{X} - X_T \| / \| X_T \| . \qquad (11)$$

Известно [5], что величины η и ρ связаны между собой следующим соотношением:

$$\eta \le k(A)\rho . \qquad (12)$$

Таким образом,

$$k(A) \ge \eta/\rho . \qquad (13)$$

Величины η и ρ можно определить в результате решения системы, а величину

$$k_2(A) = \eta/\rho . \qquad (14)$$

использовать в качестве нижней оценки числа обусловленности. При решении тестовой системы оценку (14) нетрудно вычислить, так как точное решение системы известно.

С помощью генератора тестовых систем моделировались системы нормальных уравнений с ленточными матрицами порядка N и шириной ленты β ($a_{ij} = 0$, если $|i-j| > \beta$), которые затем решались по формулам (2) и (3). Моделирование и решение систем выполнялись на ЭВМ ЕС-1045.

В табл. 1 приведены результаты моделирования и решения систем порядка $N = 250$ и шириной ленты $\beta = 50$ в зависимости от длины интервала моделирования элементов матрицы L $\Delta_\ell = b - a$

Результаты моделирования

Таблица I

N	$\bar{\ell}$	Δ_ℓ	d_{min}	d_{max}	$\rho\cdot 10^{15}$	η	$k_2(A)$
I	0	0,5	I,0	I,0	4,0	$I,0\cdot IO^{-I3}$	24,9
2	0	0,75	I,0	I,0	2,8	$6,4\cdot IO^{-II}$	$2,3\cdot IO^{4}$
3	0	I,0	I,0	I,0	2,3	$9,0\cdot IO^{-8}$	$3,9\cdot IO^{7}$
4	0	I,25	I,0	I,0	3,5	$I,I\cdot IO^{-2}$	$3,I\cdot IO^{I2}$
5	0,5	0,5	I,0	I,0	5,I	$3,6\cdot IO^{-II}$	$7,0\cdot IO^{3}$
6	I,0	0,5	I,0	I,0	3,I	$3,5\cdot IO^{-9}$	$I,I\cdot IO^{6}$
7	I,5	0,5	I,0	I,0	5,4	$7,0\cdot IO^{-4}$	$I,3\cdot IO^{II}$
8	0	0,5	I,0	I0000,0	3,5	$7,9\cdot IO^{-I3}$	229,3
9	0	I,0	I,0	I0000,0	3,7	$I,4\cdot IO^{-6}$	$3,7\cdot IO^{8}$

Таблица 2

N	N	β	$\bar{\ell}$	Δ_ℓ	$\rho\cdot 10^{15}$	η	$k_2(A)$
I	500	50	0,0	0,5	4,0	$3,6\cdot IO^{-I3}$	89,8
2	I000	50	0,0	0,5	4,0	$2,0\cdot IO^{-I2}$	507,3
3	I000	20	0,0	0,5	I,4	$I,8\cdot IO^{-I5}$	I,3
4	500	50	0,0	0,8	2,6	$7,3\cdot IO^{-6}$	$2,8\cdot IO^{9}$
5	250	25	0,0	0,5	2,5	$4,3\cdot IO^{-I5}$	I,7
6	250	I00	0,0	0,5	5,9	$2,9\cdot IO^{-I3}$	49,3

и их среднего значения $\bar{\ell} = (a+b)/2$, а также от диапазона изменения элементов матрицы D . Как видно из таблицы, генератор тестовых систем позволяет моделировать матрицы практически любой обусловленности от очень хорошей (примеры I, 8) до очень плохой (примеры 4, 7). Из табл.I следует также, что уве-

Таблица 3

№	$X = A^{-1}B$		$LDL^{T}X = B$		$k_1(A)$	$k_2(A)$
	ρ	η	ρ	η		
I	I,7·IO^{-I4}	I,2·IO^{-I5}	I,3·IO^{-I5}	I,2·IO^{-I5}	3,0	I,0
2	8,3·IO^{-I2}	I,2·IO^{-I0}	I,4·IO^{-I5}	6,5·IO^{-II}	2,0·IO^{5}	5,0·IO^{4}
3	I,9·IO^{-7}	I,3·IO^{-6}	8,2·IO^{-I6}	I,6·IO^{-6}	8,3·IO^{I0}	2,0·IO^{9}
4	4,9·IO^{-2}	I,5	I,6·IO^{-I5}	I,I5	7,0·IO^{I5}	7,0·IO^{I4}

личение интервала моделирования Δ_l или смещение значения l относительно нуля приводит к ухудшению обусловленности матрицы. В то же время увеличение диапазона изменения элементов матрицы D влияет на изменение обусловленности незначительно (для сравнения можно взять прим. 8,9 и 3).

Выбор параметров моделирования для получения матриц заданной обусловленности зависит от порядка матрицы и размера профиля или ширины ленты. Для анализа этой зависимости было проведено моделирование систем различного порядка и ширины ленты при фиксированных параметрах моделирования. Результаты представлены в табл. 2. На обусловленность матриц с узкой лентой (см. прим. 2,3 из табл. 2) сильнее влияет ширина ленты, чем порядок матрицы. Для матриц с сравнительно широкой лентой (см. прим. I из табл. I и 6 из табл. 2) эта зависимость не так ярко выражена. Следует отметить, что скорость изменения обусловленности системы от изменения порядка матрицы (ширины ленты или размеров профиля) зависит от выбора параметров моделирования. Так, например, использование параметров моделирования из прим. 3 табл. I для матрицы порядка N =500 приводит к настолько плохо обусловленной системе, что получить ее решение оказалось невозможным. Полученные результаты подтвердили высокую устойчивость метода решения по формулам (2) и (3). Как видно из табл. I,2 величина ρ, характеризующая количество верных знаков в векторе правой части, получающегося при подстановке вычисленного решения в систему, имеет порядок IO^{-8} и лежит на границе разрядной сетки при вычислениях с двойной точностью.

этом величина ρ практически не зависит ни от порядка и ширины ленты матрицы, ни от обусловленности системы.

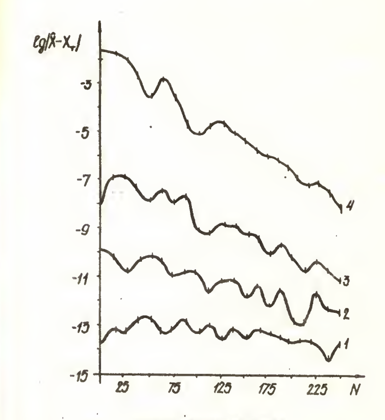


Рис.2. Графики накопления ошибок

Для сравнительного анализа устойчивости было выполнено моделирование и решение систем нормальных уравнений различной обусловленности с помощью формул (2), (3) и при использовании обращения матрицы. Результаты приводятся в табл.3. Для всех примеров было взято N = 100, β = 20 . Из табл.3 видно, что

решение с помощью обращения матрицы становится неустойчивым при ухудшении обусловленности системы, хотя ошибки решения имеют сопоставимые величины. Из табл.3 следует также, что величины $k_1(A)$ и $k_2(A)$ хорошо согласуются между собой.

Анализ величин η и оценок числа обусловленности в табл.I – 3 подтверждает эмпирический закон, согласно которому из-за ошибок округления в процессе решения теряется $\lg k(A)$ десятичных знаков [6] , а именно:

$$15 - \lg \eta \approx \lg K(A). \qquad (15)$$

где вместо $k(A)$ нужно подставить полученные оценки.

По результатам моделирования был выполнен анализ накопления ошибок в процессе решения в зависимости от обусловленности системы. На рис.2 представлены зависимости ошибок решения от номера элемента в векторе решения для примеров I–4 из табл.I. Значения модулей ошибок приведены в логарифмическом масштабе. Данные зависимости строились по точкам через каждые I2–I3 номеров, поэтому полученные графики являются сглаженными по сравнению с истинными колебаниями модуля ошибки, однако характер накопления не зависит от этих колебаний. Из рис.2 видно, что чем хуже обусловлена матрица, тем сильнее влияние накопления ошибок, причем имеет место тенденция возрастания ошибки от последнего элемента вектора решения к первому. Характер накопления ошибок связан с выполнением обратного хода.

Таким образом, реализованный алгоритм моделирования разреженных матриц позволяет получать положительно определенные матрицы практически любой обусловленности. Результаты моделирования показали, что увеличение длины интервала моделирования и смещение среднего значения элементов матрицы относительно нуля ухудшают обусловленность моделируемой системы и наоборот.

С помощью данного генератора тестовых систем был выполнен сравнительный анализ устойчивости при решении системы с помощью треугольного разложения и обращения матрицы и показана численная неустойчивость последнего способа, а также выполнен анализ накопления ошибок в векторе решения при вычислениях по формулам (2) и (3).

Данный генератор можно использовать также в задачах статистического оценивания для моделирования априорных ковариационных матриц параметров, реальные ковариационные матрицы которых неизвестны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беленький Е.Г. Нумерация снимков и точек сгущения блока при построении опорных сетей на Луне и планетах // Тр. ЦНИИГАиК. Вып.228. М., 1981. С.86-109.

2. Беленький Е.Г. Алгоритм решения разреженной системы нормальных уравнений с использованием внешней памяти для уравнивания аналитической фототриангуляции. Совершенствование техники и технологии и передовой опыт выполнения геодезических и топографических работ // Научн.-техн.реф.сб. № 103. М. 1983. С.28-30.

3. *Gentleman W. M., George A. Sparse matrix software // Sparse matrix computations. J. Bunch, D. Rose (ed.) Academic Press. 1976. P. 263-273.*

4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980. 279 с.

5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., 1975. 631 с.

6. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М., 1980. 454 с.

УДК 62-50

И.А.Селиванова (Уральский политехнический институт)

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ СЕКУЩЕЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается система стабилизации, объектом которой является интегрирующее звено второго порядка. Управление осуществляется цифровым регулятором. Анализ динамики системы проводится методом секущей области и базируется на работах [1, 2], где алгоритм стабилизации основывается на измерении выходной координаты объекта. В данной работе для обеспечения стабилизации САР предусмотрено измерение первой производной координаты аналоговым датчиком.

I. Структура системы стабилизации и основные расчетные соотношения

Структурная схема системы стабилизации представлена на рисунке. Здесь C – коэффициент, характеризующий эффективность исполнительного органа; T_0 – период квантования по времени; $\bar{\sigma}(t)$ и $\sigma^*(t)$ – соответственно функция управления и приведенная функция управления; $\bar{u}[\kappa]$ и $u[\kappa]$ – управляющее воздействие и приведенное управляющее воздействие; a_0 и a_1 – параметры управления; $r(t)$ – выходная координата.

Переключение реле происходит при выполнении следующих условий:

$$|\sigma^*(t)| = \frac{|\sigma(t)|}{T_0} \geq \alpha. \qquad (I)$$

Уравнение движения объекта имеет вид:

$$\ddot{r}(t) = \begin{cases} CT_0, \\ 0, \\ -CT_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Функция управления:

$$\bar{\sigma}(t) = a_0 r(t) + a_1 \dot{r}(t). \qquad (3)$$

Как видно из рисунка, $u[\kappa]$ принимает дискретные значения -I,0,+I.

Для анализа динамики системы, следуя (I), запишем конечно-разностные уравнения системы:

$$x_1[\kappa+1] = x_1[\kappa] + u[\kappa]; \qquad (4)$$

$$x_2[\kappa+1] = x_1[\kappa] + x_2[\kappa]. \qquad (5)$$

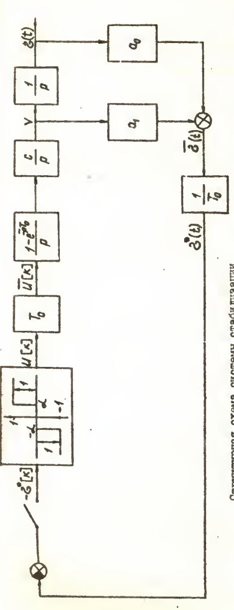
Это нетрудно сделать, записав выражение для импульсной передаточной функции приведенной непрерывной части системы и вводя обозначения:

$$x_1(z) = \frac{u(z)}{z-1}, \quad x_2(z) = \frac{u(z)}{(z-1)^2} = \frac{x_1(z)}{z-1}.$$

Переменные $x_1[\kappa]$, $x_2[\kappa]$ связаны с координатами $r(t)$ и $v(t) = \dot{r}(t)$ соотношениями:

$$v[\kappa] = T_0 C x_1[\kappa]; \qquad (6)$$

$$r[\kappa] = \frac{CT_0^2}{2}\{2x_2[\kappa] + x_1[\kappa]\}. \qquad (7)$$



Структурная схема системы стабилизации

Введение координат x_1 и x_2 позволяет упростить процесс расчета движений в системе за счет того, что при изменении дискретного времени k на единицу, x_1 изменяется на один и тот же постоянный по величине квант, равный ± 1.

Легко показать, что

$$\sigma^*[k] = \frac{CT_0^2}{2} \times \left\{ x_1[k]\left(\frac{2a_1}{T_0} + a_0\right) + 2a_0 x_2[k] \right\}. \quad (8)$$

Вводя обозначения

$$\sigma[k] = \frac{2\sigma^*[k]}{CT_0^2}; \quad (9)$$

$$A_1 = \frac{2a_1}{T_0} + a_0; \quad (10)$$

$$A_2 = 2a_0; \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{CT_0^2}; \quad (12)$$

представим функцию управления в виде:

$$\sigma[k] = A_1 x_1[k] + A_2 x_2[k], \quad (13)$$

а условия переключения

$$|\sigma[\kappa]| > \varepsilon. \qquad (14)$$

Из соотношений (13)-(14) определим выражения для линий переключения (ЛП):

$$\text{ЛП1} \quad \sigma[\kappa] = -\varepsilon, \quad x_2 = -\frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2} x_1 ; \qquad (15)$$

$$\text{ЛП2} \quad \sigma[\kappa] = \varepsilon, \quad x_2 = \frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2} x_1 . \qquad (16)$$

Согласно [1] уравнения движения объекта при постоянном значении приведенного управляющего воздействия $u[\kappa]$ определяются формулами:

при $u \neq 0$

$$x_1[\kappa] = x_1[0] + \kappa \, sign \, u[\kappa-1] ; \qquad (17)$$

$$x_2[\kappa] = x_2[0] + \kappa \, sign \, u[\kappa-1] \, \frac{\kappa-1}{2} + \kappa x_1[0] ; \qquad (18)$$

при $u = 0$

$$x_1[\kappa] = x_1[0] ; \qquad (19)$$

$$x_2[\kappa] = \kappa x_1[0] + x_2[0]. \qquad (20)$$

Уравнения фазовых кривых системы соответственно при $u \neq 0$ (21) и $u = 0$ (22):

$$x_2 = x_2[0] - \frac{1}{2} x_1[0] \{ x_1[0] \, sign \, u - 1 \} + \frac{1}{2} x_1^2 \, sign \, u - \frac{1}{2} x_1 ; \qquad (21)$$

$$x_1 = x_1[0]. \qquad (22)$$

Из (21) следует, что точки $(x_1[\kappa], \; x_2[\kappa])$ располагаются на параболах, симметричных относительно прямой $x_1 = \frac{1}{2} sign \, u$.

2. Функции последования

Для исследования движений нелинейной цифровой системы стабилизации используется метод секущей области, описанный в [1].

Для установления характерных типов движений в системе достаточно провести исследование траекторий, начало которых находится в полосе S :

$$S = \{ x_1 \in (-0,5, \, 0,5), \; x_2 \in (-\infty, \infty) \}.$$

Координаты произвольной точки в области S обозначим: $\delta = x_1$,

$\gamma = x_2$. Область S выбрана таким образом, что все траектории движения системы, начинающиеся в произвольно заданной точке (x_1, x_2) плоскости (x_1, x_2), попадают в эту область и покидают ее за один шаг. Такой способ выбора области S приводит к тому, что вместо исследования поведения системы при произвольно заданных начальных условиях достаточно исследовать поведение системы при начальных условиях $x_1[0] = \delta$, $x_2[0] = \gamma$.

Назначая в области S произвольную точку $M(\gamma, \delta)$, можно определить отображение $\bar{M}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ этой точки в область S и, следовательно, получить функцию последования $\bar{M} = f(M)$, $M, \bar{M} \in S$:

$$\bar{\gamma} = f_1(\gamma, \delta); \quad \bar{\delta} = f_2(\gamma, \delta).$$

Решения системы (4), (5), (I3), (I4) таковы, что если начальная точка $(x_1[0], x_2[0])$ принадлежит линиям $L\delta = \{x_1[0] = \delta, \ \delta \in (-0{,}5, +0{,}5)\}$, то любая траектория с ростом времени бесконечное число раз возвращается на ось L_δ . Это дает основание свести анализ динамики системы к изучению функций последования вида $\bar{\gamma} = f(\gamma, \delta)$, $\delta = const$.

Укажем характерные виды траекторий движения точки $T = (x_1[k], x_2[k])$. Начало траектории находится в точке $x_1[0] = \delta$, $x_2[0] = \gamma$.

I. Точка Т в течение m тактов дискретного времени перемещается под действием управления u = -I, проскакивает за один такт зону нечувствительности и далее за m тактов с u = +I достигает линии L_δ .

2. Точка Т движется по траектории m тактов с u = -I, q тактов с u = 0 (в зоне нечувствительности) и m тактов с u = +I, возвращаясь на линию L_δ .

3. Точка Т достигает линии L_δ в режиме скольжения относительно линии переключения.

Можно показать [I] , что функция последования для второго из указанных случаев (q ≠ 0) определяется выражением

$$\bar{\gamma} = \gamma + m(2\delta - m) + q(\delta - m). \qquad (23)$$

Если в зоне нечувствительности точка Т не задерживается (q = 0), то

$$\bar{\gamma} = \gamma + m\,(2\delta - m).$$

Функция последования является нечетной функцией своих аргументов, т.е.

$$f(\gamma, \delta) = -f(-\gamma, -\delta). \qquad (24)$$

Это обстоятельство позволяет проводить исследование движений, зарождающихся на линии L_δ при $\delta \in [0,\ 0{,}5]$.

Как показано в [2], функция последования не обладает свойством непрерывности на всем участке изменения координаты γ. Существуют точки разрыва функции последования, т.е. точки, которым будут соответствовать изменения числа шагов до моментов перемены знака и величины управляющего воздействия.

Точки разрыва функций последования можно разделить на 2 группы. К первой группе относятся точки $\gamma_{(m)}^{(-)} \in L_\delta^{(-)}$ ($\gamma_{(m)}^{(+)} \in L_\delta^{(+)}$). В указанной записи знак – (или +) указывает начальное значение $u[0]$. Точки $\gamma_{(m)}^{(-)}$ обладают следующим свойством: при $\gamma = \gamma_{(m)}^{(-)} - 0$ точка Т движется с $u[k] = -1$ до изменения величины управляющего воздействия в течение m тактов; при $\gamma = \gamma_{(m)}^{(-)} + 0$ изменение управляющего воздействия происходит через m + I такт. Ко второй группе относятся точки $\gamma_{(m,q)}^{(-)}$ ($\gamma_{(m,q)}^{(+)}$), определяющие изменение поведения точки Т в зоне нечувствительности после m тактов движения при $u[k] = -1 (u[k] = 1)$ и обладающие свойством: при $\gamma = \gamma_{(m,q)}^{(-)} + 0$ точка Т будет двигаться m тактов с $u[k] = -1$, попадает в зону нечувствительности, а затем q тактов будет двигаться по линии $x_1 = \delta - m$; при $\gamma = \gamma_{(m,q)}^{(-)} + 0$ в зоне нечувствительности точка Т будет двигаться $(q + 1)$ такт.

На основании соотношений (I5)-(22) легко получить выражения для точек разрыва функции последования:

$$\gamma_{(m)}^{(-)} = \frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}(\delta - m) - m\delta + \frac{m(m-1)}{2}; \qquad (25)$$

$$\gamma_{(m)}^{(+)} = -\frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}(\delta + m) - m\delta - \frac{m(m-1)}{2}; \qquad (26)$$

$$\gamma_{(m,q)}^{(-)} = -\frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}(\delta - m) - m\delta + \frac{m(m-1)}{2} - q(\delta - m); \qquad (27)$$

$$\gamma_{(m,q)}^{(+)} = \frac{\varepsilon}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}(\delta + m) - m\delta - \frac{m(m-1)}{2} - q(\delta + m). \qquad (28)$$

Таким образом, для построения функции последования, соответствующей фиксированным значениям параметров a_0, a_1, α, необходимо:

I. Вычислить точки разрыва $\gamma^{(-)}_{(m)}$ и $\gamma^{(-)}_{(m+1)}$ по формуле (25) начиная с $m = 0$.

2. Последовательно вычислять точки $\gamma^{(-)}_{(m+1,q)}$, $q = 0, I, 2, \ldots$, отбрасывая все точки $\gamma^{(-)}_{(m+1,q)}$, которые не принадлежат отрезку $[\gamma^{(-)}_{(m)}, \gamma^{(-)}_{(m+1)}]$. В результате будет получен упорядоченный набор точек $\Gamma_{m,m+1} = \{\gamma^{(-)}_{(m)}, \gamma^{(-)}_{(m+1,q)}, \gamma^{(-)}_{(m+1,q+1)}, \ldots, \gamma^{(-)}_{(m+1)}\}$.

3. Для всех точек $\gamma \in \Gamma_{m,m+1}$ по формуле (23) определяются значения $\bar{\gamma}$ справа и слева от γ. Значения $\bar{\gamma}$ слева от точки $\gamma = \gamma^{(-)}_{(m+1,q)}$:

$$\bar{\gamma} = \gamma + (m+1)(2\delta - m - 1) + q(\delta - m - 1),$$

справа:

$$\bar{\gamma} = \gamma + (m+1)(2\delta - m - 1) + (q+1)(\delta - m - 1).$$

Значения $\bar{\gamma}$ слева от точки $\gamma = \gamma^{(-)}_{(m)}$ при $m \neq 0$:

$$\bar{\gamma} = \gamma + m(2\delta - m) + (q_\nu + 1)(\delta - m),$$

где q_ν – максимальный индекс q из упорядоченного набора $\Gamma_{m-1,m}$. Значения $\bar{\gamma}$ справа от $\gamma = \gamma^{(-)}_{(m)}$:

$$\bar{\gamma} = \gamma + (m+1)(2\delta - m - 1) + q_\mu (\delta - m - 1).$$

Здесь q_μ – минимальный индекс из упорядоченного набора $\Gamma_{m,m+1}$.

При $m = 0$ значение $\bar{\gamma}$ слева от точки $\gamma^{(-)}_{(0)}$ равно:

$$\bar{\gamma} = \gamma^{(-)}_{(0)} + \delta.$$

4. На плоскости $(\gamma, \bar{\gamma})$ в точках разрыва отображения точки $\bar{\gamma}$ соединяются вертикальной прямой, а между точками разрыва – наклонными линиями.

5. Для значений $\gamma \in L^{(+)}_{\delta}$ значения $\bar{\gamma}$ вычисляются на основании свойства (24) функций последования.

3. Анализ процессов в САР

Прежде всего целесообразно установить предельную ограниченность процессов в САР.

Уоловие предельной ограниченности процессов в САР может быть записано в следующем виде [I] :

$$\lim_{m\to\infty} (\bar{\gamma}^{+}/\gamma_{(m)}^{(-)}) > -1, \qquad (29)$$

где $\gamma_{(m)}^{(-)}$ – координаты точек разрыва функции последования; $\bar{\gamma}^{+}$ – значение функции последования справа от точек разрыва:

$$\bar{\gamma}^{+} = \bar{\gamma}(\gamma_{(m)}^{(-)} + 0).$$

Условие предельной ограниченности движений в системе с учетом (I0)-(I2), (23), (25) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{a_1}{a_0} > \left(\frac{a_1}{a_0}\right)_{кр} = T_0. \qquad (30)$$

Выполнение условия (30) влечет за собой [I] существование для данной системы ограниченного асимптотически устойчивого множества значений (x_1, x_2), к которому стремятся в течение времени, либо входят в него и больше его не покидают все траектории системы (4)-(5).

Выделение области значений координаты $\gamma \in L_\delta$, в которую сходятся движения системы (4)-(5), может быть осуществлено на основании анализа функций последования. Располагая соответствующими программами для проведения расчетов на ЦВМ, можно получить семейство функций последования при различных параметрах управления a_0, a_1. Анализ полученных зависимостей позволяет сделать выводы о характере возможных движений в системе.

При выполнении условия (29) для любого κ величина $|\gamma[\kappa]| < \infty$. Усилим условие (29), выбирая некоторое конечное значение m, что приведет к уменьшению размеров области S_x, ограничивающей при $\kappa \to \infty$ все движения системы.

В качестве примера рассмотрим расчет области параметров управления a_0, a_1 для которых условие

$$\bar{\gamma}^{+}/\gamma_{(m)}^{(-)} > -1.$$

выполняется для всех $m > 3$. При этом все движения системы будут сходиться в область S_x, в которой максимальное количество шагов с ненулевым управлением при перемещении точки

Т с линии L_{δ} на линию L_{δ} равно 4: 2 шага с $u=-1(u=+1)$, q шагов с $u=0$, 2 шага с $u=+1(u=-1)$.

Расчет области параметров управления проведем по следующей методике:

I. Рассмотрим упорядоченный набор $\Gamma^{q}_{m-1,m}$ при $m = 3$:

$$\Gamma^{q}_{m-1,m} = \{\gamma^{(-)}_{(m-1)}, \gamma^{(-)}_{(m,q)}, \gamma^{(-)}_{(m,q+1)}, \ldots, \gamma^{(-)}_{(m)}\}.$$

2. Последовательно назначим $q = 0,1,2,\ldots$, полагая q – минимальным индексом точки разрыва отображения $\gamma^{(-)}_{(m,q)}$ в наборе $\Gamma^{q}_{m-1,m}$. В зависимости от значения q определим область параметров A_q.

3. В соответствии с [I] область параметров определяется выполнением следующих соотношений:

$$\gamma^{(-)}_{(m,q)} > \gamma^{(-)}_{(m-1)}; \qquad (31)$$

$$\gamma^{(-)}_{(m,q-1)} < \gamma^{(-)}_{(m-1)}; \qquad (32)$$

$$\bar{\gamma}^{+} > -\gamma^{(-)}_{(m-1)}, \quad \bar{\gamma}^{+} = \bar{\gamma}(\gamma^{(-)}_{(m-1)} + 0); \qquad (33)$$

$$\bar{\gamma}^{+} > -\gamma^{(-)}_{(m,q)}, \quad \bar{\gamma}^{+} = \bar{\gamma}(\gamma^{(-)}_{(m,q)} + 0). \qquad (34)$$

4. С учетом найденных соотношений для точек разрыва функций последования, по формулам (3I)-(34) определим параметры a_0, a_1, для которых эти соотношения являются верными.

Рассмотрим, например, определение границ области A_0. В соответствии с (3I), (33), (34) должны выполняться условия:

$$\gamma^{(-)}_{(3,0)} > \gamma^{(-)}_{(2)}; \qquad (35)$$

$$\bar{\gamma}^{+}_{(2)} > -\gamma^{(-)}_{(2)}; \qquad (36)$$

$$\bar{\gamma}^{+}_{(3)} > -\gamma^{(-)}_{(3,0)}. \qquad (37)$$

Учитывая выражения (23) для функции последования и выражения (25), (27) для точек разрыва отображения, получим соответственно следующие выражения:

$$\varepsilon < \frac{a_1}{T_0} + a_0(2,5-\delta);$$

$$\varepsilon > \frac{2a_1}{T_0}(\delta-2) + a_0(5-\delta);$$

$$\varepsilon < -\frac{2a_1}{T_0}(\delta - 3) - 3a_0 .$$

При фиксированном значении $\varepsilon = f(\alpha)$ эти условия определяют на плоскости параметров (a_0, a_1) область A_0 .

Аналогичным образом определяются области A_q при $q \neq 0$ (при фиксированном m). Объединение областей A_q на плоскости (a_0, a_1) дает область A , представляющую собой множество параметров a_0, a_1 , которые гарантируют сходимость всех движений в область S_x , в которой максимальное количество шагов с ненулевым управлением равно 4.

Границы каждой области A_q зависят от значения δ . Область, являющаяся пересечением областей A_q при $\delta = 0$ и $\delta = 0{,}5$, является областью параметров a_0, a_1 , удовлетворяющих неравенствам (31)-(34) при всех $\delta \in [0{,}0.5]$.

4. Заключение

В статье рассмотрены вопросы построения функций последовательности для релейно-импульсной системы стабилизации, объект которой описывается передаточной функцией $W(p) = \frac{C}{p^2}$. Управление объектом осуществляется на основе измерения выходной координаты объекта и ее производной. Описано построение областей A_q на плоскости параметров (a_0, a_1) . Выбирая параметры управления из этих областей, можно обеспечить определенный тип установившегося движения в плоскости (x_1, x_2) .

1. Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983. 336 с.

2. Шамриков Б.М. Качественное исследование нелинейных импульсных систем методом точечных отображений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. № 3. 1972. С.15-20.

УДК 621.865.8:681.3.06

О.В.Шмелева (Уральский политехнический институт)

РАЗРАБОТКА ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО СРЕДСТВА ПОСТРОЕНИЯ ДИАЛОГОВОЙ СИСТЕМЫ, ОРИЕНТИРОВАННОЙ НА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ-НЕПРОГРАММИСТА

В настоящее время не вызывает сомнений необходимость создания и широкого внедрения человеко-машинных диалоговых систем (ДС), благодаря которым эффективно используются средства вычислительной техники для решения многих практических задач. Особый интерес [I] представляет разработка диалоговых систем, которые требуют от пользователя в первую очередь специальной (профессиональной) подготовки и во вторую - подготовки в области программирования. Как средство диалога для неподготовленного пользователя широкое распространение получили меню-системы. В меню-системах у пользователя создается иллюзия взаимодействия с ЭВМ на своем профессиональном языке. Считается целесообразным создавать инструментальные средства построения меню-систем, позволяющие настраиваться на любую предметную область. Примером инструментального средства может послужить меню-система подсистемы настройки на заданную объектно-технологическую среду робота, входящая в состав "АРМ проектировщика программ управления робототехническим комплексом РМ-01".

Цель разработки подсистемы настройки заключается в построении диалога между пользователем и ЭВМ, ориентированного на пользователя-непрограммиста и обеспечивающего настройку АРМа на заданную объектно-технологическую среду, а также подстройку структуры диалога в процессе работы при переходе на новую объектно-технологическую среду. Подсистема обеспечивает ввод информации, описывающей расположение технологических зон, геометрическую форму стационарных и перемещаемых объектов в рабочем пространстве робота, в том числе и геометрию самого робота, что составляет предметную область системы. Требование модификации архитектуры ДС, начиная от изменения сценария диалога и реплик диалога и кончая подключением новых функций, оп-

ределяло характер и организацию разработки программного обеспечения ДС подсистемы настройки.

Основу построения ДС, удовлетворяющей перечисленным требованиям, составляют выделение и объединение функций управления диалоговым процессом в отдельный блок - программу управления диалогом (ПУД). Жесткий формат кадра диалога и построение сценария диалога на основе использования структуры фреймов обеспечивают независимость ПУД от сценария диалога и пакета прикладных программ пользователя. Введем определения понятий, необходимых для формализованного описания диалогового взаимодействия человека о ЭВМ и используюшихся в этой работе. Под диалогом следует понимать процесс структурированного обмена сообщениями между человеком и ЭВМ, направленный на обеспечение решения конкретной прикладной задачи. Шаг диалога- это часть диалога, включающая следующие действия: вывод сообщения из ЭВМ, анализ сообщения пользователем, ввод человеком сообщения в ЭВМ, обработка введенного сообщения машиной. Диалоговое сообщение - это алфавитно-цифровая или графическая информация, которой партнеры обмениваются на каждом шаге диалога. Кадр - это формат сообщения при его выдаче на экран дисплея. Информация, содержащаяся в кадре, может быть дополнена правилами реакции ЭВМ на те или иные ответы пользователя на данном шаге диалога. Фрейм - это кадр, пополненный правилами поведения ЭВМ на данном шаге диалога. Сценарий диалога - описание на специализированном языке полного набора фреймов и структуры диалога [2] .

Для описания сценария диалога подсистемы настройки используется понятие кадра. Кадр имеет жесткую структуру. Стандартизация расположения различных видов информации в кадре уменьшает затраты времени на ее анализ человеком. В кадре выделено три поля (рис I): поле вопроса или предложения выполнить действия по формированию ответа; поле меню, которое содержит правило формирования ответа или список допустимых ответов; поле ответа.

Примеры кадров сценария диалога выглядят следующим образом:

I Введите имя технологического поля

Имя - последовательность букв и цифр, начинающаяся с буквы, длиной 6 символов.

Введите имя:

2. Введите тип технологической операции.

   I. Взять деталь

   2 Отдать деталь

   3 Выдержка

Введите номер ответа:

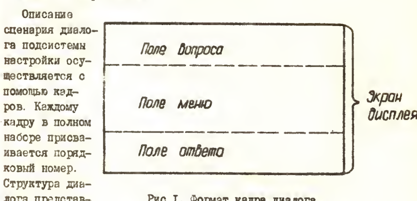


Рис.I. Формат кадра диалога

Описание сценария диалога подсистемы настройки осуществляется с помощью кадров. Каждому кадру в полном наборе присваивается порядковый номер. Структура диалога представляется в виде ориентированного графа, вершинами которого являются номера кадров диалога. Дуги графа, выходящие из одной вершины, отражают возможные пути продолжения диалога в зависимости от ответа пользователя Набор кадров и граф диалога используется при заполнении набора данных фреймов диалога.

Вершине на графе вместе со всеми выходящими из нее дугами соответствует фрейм. Структура фрейма следующая:

I	2	3	4	5
Информационная часть	Командная часть			

I - кадр, выдаваемый на экран дисплея; 2 - поле допустимых ответов; 3 - поле ответа пользователя; 4 - поле указателей на выбор следующего фрейма; 5 - имя подпрограммы обработки ответа

Заполнение фреймов осуществляется специально разработанной программой в диалоге с пользователем. Укрупненная блок-схема программного обеспечения ДС подсистемы настройки приведена на

рис 2. Формирование набора данных фреймов выполняет блок редактора фреймов. Для этого предусмотрен специальный административный режим работы подсистемы настройки. В административном

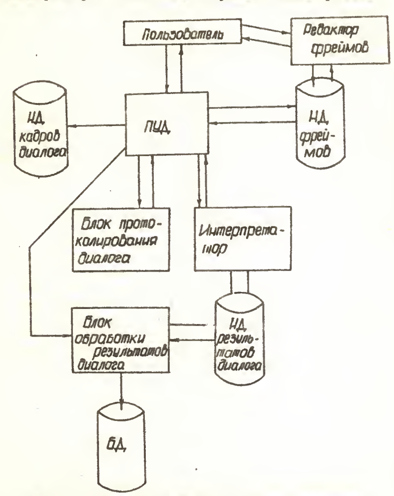


Рис.2. Блок-схема программного обеспечения диалоговой системы

режиме осуществляется и корректировка сценария диалога. Введение в командную часть фрейма имени подпрограммы обработки вводимой информации обеспечивает независимость диалога от пакета прикладных программ пользователя.

В состав блок-схемы программного обеспечения ДС входят пять блоков. ПУД являются организующим блоком и выполняет следующие функции: считывает фрейм из набора данных фреймов диалога, высвечивает кадр на экране дисплея, считывает и анализирует ответы пользователя. В первую очередь выясняется, не является ли ответ высокоприоритетной директивой, например "Просмотр протокола диалога" или "Конец диалога". В этом случае директива интерпретируется и управление передается соответствующим блокам - блоку протоколирования диалога или блоку обработки результатов диалога. В других случаях управление передается интерпретатору командных строк. Интерпретатор осуществляет сопоставление ответа пользователя с возможными для данного состояния ответами. Если при анализе не установлена допустимость ответа, система классифицирует ответ как неправильный, формирует диагностическое сообщение и передает управление ПУД. ПУД выдает диагностическое сообщение на экран и предлагает повторить действия. В случае правильного ответа интерпретатор выполняет дешифровку командной части фрейма и возвращает управление организующему блоку. Разделение управляющей и исполнительной функций диалогового процесса позволяет достичь мобильности программного обеспечения, возможности гибко управлять диалоговым процессом, а также эффективности и удобства разработки программного обеспечения.

Предложенный вариант диалоговой системы является экспериментальным образцом При проектировании использовалась концепция "быстрого прототипа" [3] . Дальнейшее развитие ДС может в первую очередь коснуться интерпретатора командных строк. Новые функции интерпретатора появятся в том случае, если появятся новые типы связей между элементами предметной области. В представленном варианте ДС присутствуют два типа связей: поисковая (задает статистические связи); действие без выдачи какого-либо ответа (ввод информации). Блок редактора фреймов и блок обработки результатов предлагается строить с использованием СУБД.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Кокарева Л.В. Анализ опыта реализации диалоговых систем // Управляющие системы и машины. 1987. № 4. С.3-69.

2. Герасимов Н.А., Полищук В.Н. Разработка программного обеспечения адаптивных диалоговых систем // Программирование. 1982. № 4. С.44-53.

3. Попов Э.В. Экспертные системы (решение неформализованных задач в диалоге с ЭВМ) // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 4. С.5-18.

4. Анисимов В.И., Борозцов Е.Г., Дмитриевич Г.Д. Адаптивное управление диалогом в проектирующих подсистемах многопользовательской САПР РЭА на ЕС ЭВМ // Управляющие системы и машины. 1987. № 4. С.76-78.

5. Диалоговые системы. Современное состояние и перспективы развития / Довгялло А.М., Брановицкий В.И., Вершинин К.П. и др. Киев, 1987. 248 с.

УДК 621.865.8:681.3.06

Э.Л.Пономарев (Уральский политехнический институт)

ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА

Одним из важных направлений исследований в области робототехники является создание средств программирования промышленных роботов на уровне заданий, а не команд. При этом одно из центральных мест в этих исследованиях занимает проблема автоматического планирования траекторий движения робота в рабочей среде с препятствиями. Рассмотрению некоторых алгоритмов планирования траекторий движения робота и будет посвящен данный обзор.

Часто трудность учета всех деталей рабочей среды, возникновение непредусмотренных препятствий вызывают необходимость использования методов планирования движения робота в незнакомой среде только на основе информации, получаемой роботом от своих сенсорных устройств. Если размеры окрестности, в которой робот может получать информацию, соизмеримы с размерами

препятствий, то прокладка маршрутов может быть осуществлена с помощью алгоритмов, являющихся дальнейшим развитием методов, разработанных для полностью известной рабочей среды. Однако в том случае, когда размеры информативной окрестности малы, необходим принципиально иной подход. Основная особенность заключается в том, что после обнаружения препятствия робот, оставаясь на прежнем месте, не может оценить возможные направления дальнейшего движения и выбрать из них наилучшее; он может только попытаться обойти препятствие "вслепую". Для решения этой проблемы предлагались эвристические алгоритмы, не гарантирующие достижения цели. Созданы также алгоритмы обхода препятствий "вслепую", гарантирующие достижение цели. Эти алгоритмы могут быть отнесены к двум различным классам: алгоритмов, не создающих модели среды в памяти робота, и алгоритмов, создающих и использующих проблемно-ориентированную модель.

Алгоритм, относящийся к первой группе, предложен в [I]. Рассматривается круглый робот, перемещающийся по поверхности. Предлагается планировать перемещение некоторой вспомогательной точки (ВТ), не связанной жестко с роботом (например, точки контакта тактильного датчика с препятствием) и задавать способ преобразования маршрута ВТ в маршрут робота. Предлагаемый алгоритм позволяет строить маршрут ВТ на плоскости, содержащей заранее неизвестные зоны, имеющие произвольную форму и расположение в рабочей области. В работе приведены доказательство сходимости алгоритма и результаты экспериментальной проверки алгоритма. Недостатком работы является то, что алгоритм не дает оптимального маршрута.

В [2] рассмотрен пример алгоритма, относящегося ко второй группе. Алгоритм основывается на описании задачи с помощью графа. Граф строится по клеточному представлению частично неизвестной среды с использованием не двухцветной, а трехцветной карты местности, где наряду с "белыми" (свободными) и "черными" (непроходимыми) клетками входят в рассмотрение "серые" клетки, о которых робот пока не имеет достоверных сведений. По мере попадания "серых" клеток в информативную окрестность движущегося робота, они раскрашиваются либо в черный, либо в белый цвет. Неявное задание трехцветного графа и его

последовательное наращивание по локальной (и даже контактной) информации не вызывает принципиальных затруднений. Недостатком этого алгоритма является то, что с увеличением подробности карты местности экспоненциально возрастает вычислительная сложность.

В большинстве случаев движение манипулятора с большим числом степеней подвижности можно разделить на два типа: позиционирование (или движение "в большом") и ориентацию схвата. Предлагаемые в [3] алгоритмы служат для формирования движения "в большом".

В предлагаемых алгоритмах рабочее пространство представляет собой плоскость, границы которой определяются кинематической схемой манипулятора. Начальное и целевое положения концевой точки манипулятора заданы в рабочем пространстве. Рабочее пространство может содержать конечное число препятствий, ограниченных простыми замкнутыми кривыми конечной длины. Согласно используемому подходу вводится в рассмотрение некоторое $I-\ell$ -пространство, являющееся отображением рабочего пространства (в I-м пространстве манипулятор отображается точкой). В работе также рассматривается возможность использования данного алгоритма для пяти типов плоских манипуляторов.

Один из наиболее общих подходов к планированию маршрута движения мобильных роботов основывается на сжатии движущегося объекта в точку и увеличении препятствий для компенсации размеров действительного объекта. Карта безопасных прямолинейных траекторий между раскрытыми вершинами препятствий, представленных многоугольниками, называется графом видимости. Траектория минимальной длины может быть найдена с использованием поиска по графу видимости [4] .

Преимущество этого метода заключается в том, что легче рассчитать пересечение точки с набором объектов, чем вычислить пересечение объектов. Недостатком этого метода в применении к манипуляторам, является то, что размеры перемещаемого объекта должны быть известны при разработке алгоритма и не могут изменяться. Другой недостаток заключается в том, что этот алгоритм дает траекторию, которая стремится быть очень близкой к препятствиям.

Похожий метод был применен к задаче в трехмерном пространстве с перемещательными и вращательными движениями объектов. В этом случае вычислительная эффективность очень низка, не существует гарантии, что полученная траектория будет оптимальной [5] .

В [6] описан алгоритм нахождения пути точечного робота с минимальным числом поворотов в свободной области, ограниченной многоугольником (не обязательно выпуклым) из данной начальной точки в любую заданную целевую точку. При формализации задачи предполагается, что многоугольник "простой", т.е. ограничен простой замкнутой кривой, которая делит плоскость на две области: неограниченную - внешнюю и ограниченную - внутреннюю. Точка плоскости считается точкой многоугольника, если она не находится во внешней области.

В [7] предложен алгоритм, основанный на точном описании свободного пространства. Свободное пространство делится на три части: I) основное рабочее пространство - пространство, определенное набором конструктивных ограничений на диапазоны перемещения каждого звена; 2) частично свободное - пространство, где возможно столкновение захватного устройства с препятствием; 3) полностью свободное пространство, в котором гарантируется отсутствие столкновений при всех допустимых ориентациях. В работе обосновывается переход от планирования перемещений всей руки к планированию перемещений захватного устройства. Рабочее пространство представляется в виде клеточной структуры: все смежные клетки, принадлежащие пространству одного класса, помечаются одинаковыми метками.

Другое точное описание свободного пространства предлагает в своих работах Брукс Р.А. В [8], [9] задача решается через описание свободного пространства с помощью обобщенных цилиндров. Автор пытается найти траекторию так, чтобы она являлась центром свободного пространства. Хотя полученная траектория может быть не оптимальной, она безопасна. Дополнительным преимуществом является то, что пространство задается независимо от перемещающихся объектов. Найденная траектория является более сложной, так как перемещается объект, а не точка.

В [10] свободное пространство представляется в терминах двух элементарных форм: обобщенные конусы и выпуклые много-

угольники. Обобщенные конусы хорошо описывают узкие участки свободного пространства между двумя препятствиями. С другой стороны выпуклые многоугольники удобны как раз при описании больших областей, а в случае узких коридоров описание оказывается слишком громоздким.

Предлагаемый подход к планированию маршрута состоит в том, чтобы попарно проанализировать пространственные соотношения между соседними препятствиями и построить граф "соседства" препятствий. После этого по дуальному (по отношению к построенному) графу из обобщенных конусов и выпуклых многоугольников можно сформировать соответственно каналы и проходимые области.

В [II] авторы подходили к задаче с помощью представления отношений между движущимся объектом и препятствиями в виде вращательного планирующего графа (*rotation mapping graph*). Задача нахождения траекторий, свободных от столкновений, таким образом, трансформировалась в рассмотрение связности графа.

В литературе встречаются еще некоторые способы представления свободного пространства. Например, в [I2] свободное пространство представляется следующим образом. Через стороны препятствий, представленных в виде многоугольников, проводятся прямые линии. Всевозможные пересечения этих прямых линий образуют множество соприкасающихся многоугольников, которым в соответствие ставятся узлы графа свободного пространства. В другой работе препятствия представляются прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат [I3]. Прямые, проведенные через стороны препятствий, разбивают рабочее пространство на нерегулярную решетку. Затем методом *Quine Mc Clyskay* из множества свободных прямоугольных областей выделяются максимальные, пересекающиеся, прямоугольные, выпуклые, свободные области, которым в соответствие ставятся узлы графа. Планирование траекторий движения робота в этих случаях происходит на основе поиска на графе свободного пространства.

Среди моделей свободного пространства, большинство из которых базируется на формальном описании задачи с помощью тех или иных графовых структур, несколько особняком стоит представление рабочей среды в виде поля потенциалов [2]. Однако метод потенциалов может быть применим к задачам обхода лишь доволь-

но простых (желательно выпуклых) и расположенных на достаточном расстоянии одно от другого, препятствий.

В связи с проблемой обхода препятствий роботами, представляет интерес задача перемещения многоугольного, не обязательно выпуклого, предмета A в стационарной среде с препятствиями на плоскости, известная как задача о "перемещении кресла через дверь". Предполагается, что граница объекта является простой замкнутой кривой. Одно из решений такой задачи приведено в статье [I4] .

Как можно было заметить, характеристика любого метода планирования траекторий движения робота во многом определяется принятым способом формального описания задачи, в котором можно выделить два уровня: первичное представление карты местности и построенная по нему абстрактная модель рабочей среды, непосредственно используемая для планирования маршрута робота. Основными способами представления карты местности являются: представление в виде клеточных, контурных и других моделей; во учет реальных габаритов робота требует определенного промежуточного преобразования рабочего пространства для сведения задачи к планированию движения фиктивного, точечного робота с обходом псевдопрепятствий, расширенных, по сравнению с истинными препятствиями, на величину некоторой зоны безопасности. Решение общей задачи перемещения объекта затрудняется при необходимости учета ориентации перемещаемого тела. Одна из наиболее интересных идей преодоления этой проблемы состоит в переходе в конфигурационное пространство.

В [I5] приведен алгоритм планирования траекторий движения робота-манипулятора, использующий конфигурационное пространство. Конфигурация движущегося объекта - это набор параметров, полностью определяющих положение любой точки объекта. Например, набор значений шарнирных углов манипулятора определяет его конфигурацию. Конфигурационное пространство движущегося объекта это пространство его конфигураций. Следовательно, пространство шарнирных углов робота есть его конфигурационное пространство. Напротив, декартовы координаты схвата робота не определяют конфигурации робота ввиду неоднозначности решения обратной задачи кинематики. К недостаткам описанного метода относится экспоненциальный рост сложности алгоритма от числа степеней подвижности.

Еще один алгоритм, использующий конфигурационное пространство, предложен в [16]. В большинстве известных работ используются алгоритмы автоматического планирования траектории, но в ряде случаев предпочтительнее работать в интерактивном режиме. Интерактивный режим может быть обеспечен путем удобного представления в графическом виде конфигурационного пространства, например, на экране дисплея, что позволяет оператору прокладывать траекторию с помощью курсора. Такой алгоритм и рассматривается в [16].

Из обзора видно, что алгоритм планирования траекторий движения робота-манипулятора с n -степенями подвижности обладает значительной вычислительной сложностью. Но существует возможность перехода в зависимости от решаемой задачи к планированию траектории движения только первых трех звеньев или только одного захватного устройства. В последнем случае можно использовать алгоритмы, разработанные для мобильных роботов. В некоторых случаях возможен переход от планирования в трехмерном пространстве к планированию траекторий движения робота в двухмерном пространстве.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сирота И.М. Планирование движения автономного робота для транспортировки грузов в ГПС без маршрутопроводов: Состояние и развитие гибких производственных систем. М., 1986. С.275-285.

2. Петров А.А. Алгоритмическое обеспечение информационно-управляющих систем адаптивных роботов // Итоги науки и техники. Техн.кибернетика. Ч.Ш. Алгоритмы планирования маршрутов мобильных роботов. М., 1987. Т.21. С.92-130.

3. *Lumelsky V.J. Effect of cinematics on motion planning for planar robot arms moving amidst unknown obstacles. // IEEE J. Robotic and Automation. 1987. Vol. 3, N 3. P. 207-223.*

4. *Udupa S. Collision detection and avoidance in computer controlled manipulators // 5th International Joint Conf. on AI (Boston, Mass., 1977). P. 737-748.*

5. Donald B.R. On motion planning with six degrees of freedom: solving the intersection problems in configuration space/IEEE Int. Conf. on Rob. and Autom. (St. Louis, M.O., 1985). P. 536-541.

6. Reif J.H., Storer J.A. Minimizing turns for diskret movements in the interior of a polygon // IEEE J. Rob. and Autom. 1987. Vol 3, N 3. P. 182-193.

7. Hasegawa T. Алгоритм обхода препятствия, основанный на описании свободного пространства // Робототехника. 1987. № 33. С.1-10.

8. Brooks R.A. Planning collision free motion for pick and plase operations // Robotic. Research 2. 1983. P. 19-44.

9. Brooks R.A. Solving the find-path problem by good representation of free space /IEEE Trans. Systems. Man and Cybernatics SMC-13. 1983. P. 190-197.

10. Kuan D.T., Zamiska J.S., Brooks R.A. Natural decomposition of free space for path planning / IEEE Int. Conf. Rob. and Autom., St. Louis Mo., March 25-28, 1985. Silver Spring, Md., 1984. P. 168-173.

11. Chien R.T., Zhang L., Zhang B. Planning collision free for a robot arm among obstacles / IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelegence PAMI-6. 1984. P. 91-96.

12. Пронин А.С. Описание свободного пространства рабочей зоны манипулятора // Интеллектуальные роботы и распознавание образов: Сб.научн.трудов / Под ред. В.И.Скурихина. Киев, 1985. С.155-156.

13. Singh J.S., Wagh M.D. Robot path planning using intersection convex shapes: analysis and simulation / IEEE J. Rob. and Autom. April 1987. Vol. RA-3, N 3. P. 101-108.

14. Yap C.U. How to move a chair through a door /IEEE J.Rob. and Autom. 1987. Vol. 3, N 3. P. 172-181.

15. Lozano-Perez T. A simple motion-planning algorithm for general robot manipulators /IEEE J. Rob. and Autom. JUNE 1987. Vol. RA-3, N 3. P. 224-238.

16. Red W.E., Troung-Cao H.V., Kim K.H. Robot planning in three-dimension using the direct subspace // Trans. ASME: J. Dyn. Syst. Meas. and Contr. 1987. Vol. 109, N 3. P. 238-244.

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ПРОГРАММНЫХ
УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ
СИСТЕМ

Редактор издательства Л.И.Маликова
Технический редактор Т.В.Попова

Св.тем.пл. № 1427

Подписано в печать 21.12.89 Формат 60х84 1/16
Бумага писчая Плоская печать Усл.п.л. 7,9
Уч.-изд.л. 6,0 Тираж 500 Заказ 1082 Цена "С"

Редакционно-издательский отдел УПИ им.С.М.Кирова
620002, Екатеринбург, УПИ, 8-й учебный корпус
Цех №4 объединения "Полиграфист"
Екатеринбург, Тургенева, 20

